Verbände als Ordnungen und Algebren (Beweise)

Beweis, dass algebraische und ordnungstheoretische Definitionen von Verbänden nur verschiedene Aspekte derselben Strukturen erfassen.

Beweis von: **<A, ≤>** ⇒ **<A, ∧, ∨>**

Sei <A, ≤> eine Halbordnung mit den Verbandseigenschaften, d.h. für alle a,b ∈ A gibt es sup{a,b} und inf{a,b}.

Sei weiterhin $a \wedge b =_{df} \inf\{a,b\}$

und $a \vee b =_{df} \sup\{a,b\}$.

Dann ist <A, ∧, ∨> eine Algebra mit den Verbandseigenschaften. D.h. es gelten die Idempotenz, Kommutativität, Assoziativität und die Absorptionsgesetze.

Beweis:

L1: Idempotenz: z.z. $a \wedge a = a$ und $a \vee a = a$

Beweis:

1.	$\sup\{a\} = a$	Def. sup
2.	$\sup\{a,a\} = a$	Mengenlehre
3.	$a \vee a = a$	Def von ∨

L2: Kommutativität: z.z. $a \wedge b = b \wedge a$ und $a \vee b = b \vee a$.

Beweis:

1.	$\sup\{a,b\} = \sup\{b,a\}$	Mengenlehre
2.	$a \vee b = b \vee a$	Definition von ∨

L3: Assoziativität: z.z. $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$

Wir benötigen zu diesem Beweis folgendes Lemma:

Lemma 2: Wenn $a \leq b$ und $a \leq c$, dann $a \leq \inf\{b,c\}$.

(Beweis: Übungsaufgabe 3)

Beweis: z.z. $\inf\{\inf\{a,b\}, c\} = \inf\{a, \inf\{b,c\}\}$

und $e = \inf\{a, \inf\{b,c\}\}$.

Z.z. d = e. Dies zeigen wir, indem wir zeigen: $d \leq e$ und $e \leq d$ (dann ergibt sich d = e wegen Antisymmetrie von ≤).

0.	$d = \inf\{\inf\{a,b\}, c\}$	Annahme
1.	$e = \inf\{a, \inf\{b,c\}\}$	Annahme
2.	$d \leq \inf\{a,b\}$	0, Def. u.S.
3.	$d \leq c$	0, Def. u.S.
4.	$\inf\{a,b\} \leq a$	Def. inf
5.	$\inf\{a,b\} \leq b$	Def. inf
6.	$d \leq a$	2,4, Transitivität
7.	$d \leq b$	2,5, Transitivität
8.	$d \leq \inf\{b,c\}$	3,7, Lemma 2
9.	$d \leq \inf\{a, \inf\{b,c\}\}$	6,8, Lemma 2
10.	$d \leq e$	1,9, =Beseitigung
11.	$e \leq a$	1, Def. u.S.
12.	$e \leq \inf\{b,c\}$	1, Def. u.S.
13.	$\inf\{b,c\} \leq b$	Def. inf
14.	$\inf\{b,c\} \leq c$	Def. inf
15.	$e \leq b$	12, 13, Transitivität
16.	$e \leq c$	12, 14, Transitivität
17.	$e \leq \inf\{a,b\}$	11, 15, Lemma 2
18.	$e \leq \inf\{\inf\{a,b\}, c\}$	16, 17, Lemma 2
19.	$e \leq d$	0, 18, =Beseitigung
20.	$d = e$	10, 19, Antisymmetrie
21.	$\inf\{\inf\{a,b\}, c\} = \inf\{a, \inf\{b,c\}\}$	20, 2 x =Beseitigung
22.	$(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$	21, Einsetzung der Def.

L4: Absorption: z.z. $a = a \vee (a \wedge b)$

Hierzu benötigen wir folgendes Lemma.

Lemma 1: $b \leq a$ gdw $\sup\{a,b\} = a$.

(Beweis: Übungsaufgabe 2)

Beweis von Absorption:

1.	$\inf\{a,b\} \leq a$	Def. inf
2.	$\inf\{a,b\} \leq a$ gdw $\sup\{a, \inf\{a,b\}\} = a$	Lemma 1
3.	$\sup\{a, \inf\{a,b\}\} = a$	1,2, Äquiv.Beseitigung
4.	$a = a \vee (a \wedge b)$	Def. von ∧ und ∨

Beweis von $\langle A, \wedge, \vee \rangle \Rightarrow \langle A, \leq \rangle$.

Sei $\langle A, \wedge, \vee \rangle$ eine Algebra mit den Verbandseigenschaften (d.h. L1 - L4).

Wir definieren $a \leq b =_{df} a \wedge b = a$.

Dann ist $\langle A, \leq \rangle$ ein Verband, d.h. eine Halbordung ($\leq$ reflexiv, transitiv und antisymmetrisch), bei der es für je zwei Element a und b ein Supremum und ein Infimum gibt.

Beweis:

1) Reflexivität: z.z. für alle $a \in A$, $a \leq a$.

Beweis:

1.	$a \wedge a = a$	Idempotenz
2.	$a \leq a$	Def. $\leq$

2) Antisymmetrie: z.z. wenn $a \leq b$ und $b \leq a$, dann $a = b$.

Beweis:

1.	$a \leq b$	Annahme
2.	$b \leq a$	Annahme
3.	$a \wedge b = a$	1, Def. $\leq$
4.	$b \wedge a = b$	2, Def. $\leq$
5.	$a \wedge b = b$	4, Kommutativität
6.	$a = b$	3, 5, =Beseitigung

3) Transitivität: z.z. wenn $a \leq b$ und $b \leq c$ dann $a \leq c$

Beweis:

1.	$a \leq b$	Annahme
2.	$b \leq c$	Annahme
3.	$a \wedge b = a$	1, Def. $\leq$
4.	$b \wedge c = b$	2, Def. $\leq$
5.	$a \wedge (b \wedge c) = a$	3, 4, =Beseitigung
6.	$(a \wedge b) \wedge c = a$	5, Assoziativität
7.	$a \wedge c = a$	3, 6, =Beseitigung
8.	$a \leq c$	7, Def. $\leq$

4) Wir müssen nun noch zeigen, dass es zu je zwei Elementen $a, b \in A$ ein Supremum und ein Infimum gibt.

Wir definieren: $\sup\{a,b\} =_{df} a \vee b$.

Wir müssen zeigen, dass (1) $a \vee b$ eine o.S. von $\{a,b\}$ ist, und

(2) $a \vee b$ die kleinste o.S. von $\{a,b\}$ ist.

Zu (1):

1.	$a = a \wedge (a \vee b)$	Absorption
2.	$b = b \wedge (b \vee a)$	Absorption
3.	$b = b \wedge (a \vee b)$	2, Kommutativität
4.	$a \leq a \vee b$	1, Def. $\leq$
5.	$b \leq a \vee b$	3, Def. $\leq$
6.	$a \vee b$ ist o.S. von $\{a,b\}$	4, 5, Def. o.S.

Zu (2): z.z. $a \vee b$ ist die kleinste o.S. für $\{a,b\}$,
d.h. wenn für ein c: $a \leq c$ und $b \leq c$, dann $a \vee b \leq c$.

1.	$a \leq c$	Annahme
2.	$b \leq c$	Annahme
3.	$c \vee (c \wedge a) = c$	Absorption
4.	$(a \wedge c) \vee c = c$	3, 2xKommutativität
5.	$a \wedge c = a$	1, Def. $\leq$
6.	$a \vee c = c$	4, 5, =Beseitigung
7.	$c \vee (c \wedge b) = c$	Absorption
8.	$(b \wedge c) \vee c = c$	7, 2xKommutativität
9.	$b \wedge c = b$	2, Def. $\leq$
10.	$b \vee c = c$	8, 9, =Beseitigung
11.	$c \vee c = c$	Idempotenz
12.	$(a \vee c) \vee (b \vee c) = c$	6, 10, 11, 2x=Beseitigung
13.	$(a \vee b) \vee c = c$	12, Komm., Assoz. und Idempotenz
14.	$(a \vee b) \wedge [(a \vee b) \vee c] = (a \vee b)$	Absorption
15.	$(a \vee b) \wedge c = a \vee b$	13, 14, =Beseitigung
16.	$a \vee b \leq c$	15, Def. $\leq$