Einführung

in die

Semantik

Vorlesung mit Übung

Wintersemester

Dr. Werner Saurer
FR 4.7 Allgemeine Linguistik
Computerlinguistik
Universität des Saarlandes
66041 Saarbrücken

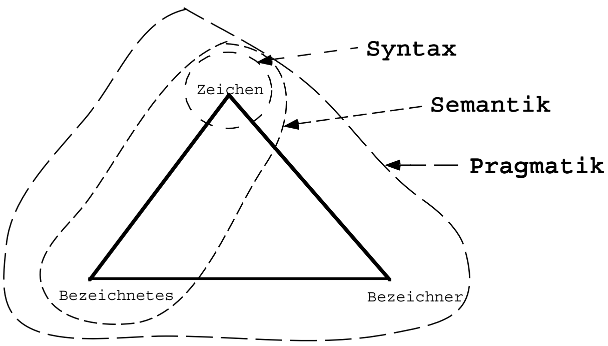
Inhalt

Was ist *Semantik*?

(1) Semantik - ein Zweig der Semiotik

Semantik ist die Lehre von der *Bedeutung* sprachlicher Zeichen.

Semantik ist ein Zweig der *Semiotik* (Wissenschaft von den Zeichensystemen, Zeichentheorie).



Figur 1: Semiotisches Dreieck

Zeichentheorie:

Syntax: Lehre von den Zeichen und ihrer Kombination untereinander

Semantik: Relation zwischen Zeichen (Sprache) und Bezeichnetem (Welt)

Pragmatik: Relation zwischen Zeichen, Bezeichnetem und dem Bezeichner (Sprache - Welt - Sprecher) - "situated uses of language"

(2) Semantik vs. Pragmatik

Beide Zweige beschäftigen sich mit der Frage "Was heisst es, eine Äusserung zu verstehen?"

Maria sagt zum Ober: "Ich hätte gern ein Glas Wasser."

(i) Wörtliche Bedeutung der Äusserung: Ausdruck eines *Wunsches*.

(ii) Interpretation dieser Äusserung durch den Ober: *Aufforderung* an ihn, Maria ein Glas Wasser zu bringen.

Semantik beschäftigt sich mit (i), während (ii) typisch von der Pragmatik beantwortet wird (*Sprechakttheorie* - wie verwendet man Sprache?). Natürlich setzt die Pragmatik dabei die Semantik voraus: die pragmatische Interpretation einer Äusserung hängt von ihrer semantischen Interpretation (d.h. wörtliche Bedeutung) ab.

(Wir werden uns hier kaum mit der Pragmatik beschäftigen. Dies ist das Thema einer eigenen Veranstaltung.)

(3) Syntax und Semantik

Syntax - die Theorie der Wohlgeformtheit von Ausdrücken einer Sprache (Zeichensystem) und ihrer Eigenschaften und Beziehungen untereinander, ohne Bezug auf Bedeutung der Ausdrücke.

Semantik - die Theorie, die den wohlgeformten Ausdrücken Bedeutungen zuordnen muss und sich mit den semantischen Eigenschaften und Beziehungen von Ausdrücken untereinander beschäftigt.

Die Semantik muss für jeden wohlgeformten Ausdruck α einer Sprache S festlegen, was die Bedeutung von α ist:

$$[\![\alpha]\!]_S = \ldots$$

("Die Bedeutung von α in S ist ... ")

Frage: Was kommt an die Stelle von "..." ?

(1) Die Bedeutung von dog im Englischen ist Hund.
(2) Die Bedeutung von Stoccarda im Italienischen ist Stuttgart.
(3) Die Bedeutung von und im Deutschen ist die Konjunktion.

(4) Objektsprache - Metasprache; Use - Mention

Semantik ist eine Wissenschaft mit einem bestimmten Gegenstand.

Der Gegenstand der Semantik ist Sprache (oder Sprachen), wie z.B. der Gegenstand der Physik die Natur ist.

In Wissenschaften wie der Physik gibt es normalerweise keine Verwechslung zwischen der Wissenschaft (Theorie, Menge von Sätzen) und ihrem Gegenstand (der Natur).

In der Logik und Linguistik, wo der Gegenstand der Wissenschaft selbst wieder eine Sprache ist, kann es leichter Verwechslungen geben. Man muss deshalb etwas sorgfältiger sein.

Deshalb die Unterscheidung zwischen *Objekt* - und *Metasprache*.

Die Objektsprache ist die Sprache, die untersucht wird (der Gegenstand der Wissenschaft), während die Metasprache die Sprache ist, in der die Erörterungen über den Gegenstand stattfinden.

Z.B. ist in (1) und (2) im vorhergehenden Abschnitt die Objektsprache das Englische und Italienische, während das Deutsche in beiden Fällen die Metasprache ist.

Wie der Fall (3) zeigt, kann eine Sprache zugleich die Objekt- wie die Metasprache sein.

Use - Mention

Wir gebrauchen (*use*) sprachliche Zeichen um über unseren Gegenstand zu sprechen (*mention*).

Z.B. gebraucht ein Italiener normalerweise das italienische Wort Stoccarda um über die Stadt Stuttgart zu sprechen. Das heisst man gebraucht einen Namen für ein Ding um über das Ding zu sprechen.

In der Semantik wollen wir über Sprache (die Objektsprache) sprechen. Also brauchen wir *Namen* für die Elemente dieser Sprache, d.h. die verschiedenen Ausdrücke der Sprache. Die Namen für die Gegenstände der Objektsprache gehören zur Metasprache.

Z.B um im Deutschen über die Stadt Rom zu sprechen, gebrauchen wir das Wort Rom (oder 'Rom' oder das Wort das aus dem 18. Buchstaben des lat. Alphabets, gefolgt von dem 15. , gefolgt von dem 13., besteht).

(1) Rom ist gross - wahr
(2) Rom ist klein - wahr
(3) Rom besteht aus drei Buchstaben - falsch
(denn Rom besteht aus Strassen und Gebäuden, nicht aus Buchstaben)
(4) Rom besteht aus drei Buchstaben - wahr
(5) Rom bezeichnet im Deutschen Rom - wahr
(6) Der Name von Rom besteht aus drei Buchstaben ?

Wenn man diese Unterscheidungen ausser Acht lässt, kommt es leicht zu Verwirrungen.

The dictionary is the only place where success comes before work.

(5) Was sind Bedeutungen?

Eine sehr schwierige Frage.
Viele verschiedene Antworten sind gegeben worden.

Die Bedeutung eines Ausdrucks ist

- sein Referent (Bezeichnetes, Extension, etc.)
- sein "Sinn" oder Gedanke (bei Sätzen) (Intension)
- eine Idee (Vorstellung im Geist des Sprechers)
- die Wahrheitsbedingungen (bei dekl. Sätzen) oder der Beitrag zu den Wahrheitsbedingungen
- die Methoden seiner Verifikation (bei dekl. Sätzen)

Glücklicherweise muss man dieses Problem nicht lösen, bevor man Semantik betreibt.

Was man allerdings braucht, ist eine intuitive Vorstellung von dem, was ein *semantisches Phänomen* ist, was also von einer semantischen Theorie beantwortet werden soll. Die semantische Theorie gibt dann eine präzisere Antwort auf diese Fragen: Bedeutungen sind die Entitäten, die wir postulieren müssen, um die semantischen Phänomene in den Griff zu bekommen.

> In order to say what a meaning is, first ask what a meaning does, and then find something that does that.
>
> D. Lewis, 1970

(6) Was sind semantische Phänomene?

D.h. welche Fragen soll eine semantische Theorie beantworten?

1) Synonymität zweier Ausdrücke (Paraphrasen)
2) Analyzität eines Ausdrucks (Redundanz)
3) semantische Ähnlichkeit und Verschiedenheit
4) Antonymie zweier Ausdrücke
5) Subordination zwischen zwei Ausdrücken
6) Bedeutsamkeit und semantische Anomalie
7) (semantische) Ambiguität
8) semantische Wahrheit, Falschheit, Kontingenz
9) Inkonsistenz (einer Menge von Sätzen)
10) Logische Folgerung, Entailment
11) Präsupposition
12) Referentielle Bezüge, anaphorische Beziehungen

Die Adäquatheit einer semantischen Theorie wird dann daran gemessen, wie sie die obigen Fragen beantwortet und die geschilderten Phänomene beschreibt und erklärt.

(7) Beispiele für die semantischen Eigenschaften und Beziehungen.

Synonymie / Paraphrase

Faust - geballte Hand
beinahe - fast
Junggeselle - männlicher Erwachsener, der noch nie verheiratet war

The police searched Sarah
Sarah was searched by the police

aber:
Unwillingly the police searched Sarah. [The mayor forced them.]
Unwillingly Sarah was searched by the police. [They had to tie her down.]

$C(A)$ nicht syn. mit $C(B)$, obwohl A syn. mit B

Semantische Ähnlichkeit und Verschiedenheit

Tante
Kuh
Nonne
Frau
Schwester
Schauspielerin
} ähnlich bezgl. Merkmal *weiblich*

Antonymie

offen	-	geschlossen
flüstern	-	schreien
Mädchen	-	Junge
kaufen	-	verkaufen
grösser	-	kleiner

Sub-/Superordination

Finger	-	Daumen
Wohngelegenheit	-	Hütte
Mensch	-	Junge

Bedeutsamkeit - sem. Anomalie

eine duftende Seife	-	ein duftendes Jucken
Hans trinkt Bier	-	Quadruplicity drinks procrastination
Der alte Mann schläft ruhelos	-	Colorless green ideas sleep furiously

Semant. Ambiguität

$\left.\begin{array}{l}\text{Bank}\\ \text{Ball}\\ \text{light}\\ \text{hot}\end{array}\right\}$ lexikalische Ambiguität

Strukturelle Ambiguität:

Kompetente Frauen und Männer sind gut bezahlt.
Grandmother is ready to eat
Washing machines can be tiresome
Every man loves a woman
Hans sucht ein Einhorn
The philosophers lifted the piano
John wondered when Alice said she would leave

Semantische Redundanz

meine weibliche Tante
ein erwachsener, unverheirateter Junggeselle
a naked nude

Analytische Wahrheit

Könige sind Monarchen
Onkel sind männlich
Es regnet oder es regnet nicht

Kontradiktion

Könige sind weiblich
Onkel sind Frauen
Grüne Blätter sind farblos
Hans küsste Maria leidenschaftlich, aber er berührte sie nicht mit den Lippen.
Es regnet und es regnet nicht

Synthetische, kontingente Sätze

Könige sind dick
Junggesellen sind neurotisch
Gras ist grün
Hans besitzt eine Ziege

In-/Konsistenz (einer Menge von Sätzen)

{Alle Bayern mögen Semmelknödel,
Theo Waigel hasst Semmelknödel}

{Rotkäppchen ging in den Wald. Dort begegnete es dem Wolf. Er sprach zu ihm: "Rotkäppchen, wo gehst du hin?" ...}

Semantische (logische) Folgerung, *entailment*

(1) Das ist gelb, Das ist eine Kreide $\models$ Das ist eine gelbe Kreide

(2) Das ist gross, Das ist ein Pottwal $\not\models$ Das ist ein grosser Pottwal

(3) (a) Hans küsste Maria leidenschaftlich

(b) Hans küsste Maria
(c) Maria wurde von Hans geküsst
(d) Maria wurde geküsst
(e) Hans berührte Maria mit seinen Lippen

(f) Hans ist mit Maria verheiratet
(g) Maria küsste Hans
(h) Hans küsste Maria viele Male
(i) Hans hat Maria nicht geküsst

(a) $\models$ (b) - (e)

(a) $\not\models$ (f) - (i),

obwohl (a) einige der Sätze in (f) - (i) nahelegt, "impliziert", suggeriert.

(4) (a) Maria schwamm früher täglich einen Kilometer.
(b) Maria schwimmt heute nicht mehr täglich einen Kilometer.

(a) $\not\models$ (b), obwohl (a) (b) nahelegt.

(5) (a) Nachdem Hans die Wände gestrichen hatte, baute Peter die Schränke auf.
(b) Hans strich die Wände.
(c) Peter baute die Schränke auf.

(a) $\models$ (b), (c)

Präsupposition

Def. *A präsupponiert B* $=_{df}$
(a) *A* legt *B* nahe
(b) die Wahrheit von *B* wird vorausgesetzt und ist nicht kontrovers

(c) zu sagen, dass *A* wahr ist, verpflichtet uns zur Wahrheit von *B*
(d) *B* ist ein Teil des "Hintergrundes" von *A*

Eine formalere Definition ist folgende:

A präsupponiert B $=_{df}$ $A \models B$ und $\sim A \models B$
(Wenn *A* wahr oder falsch ist, dann ist *B* wahr; d.h. wenn *B* nicht wahr ist, dann ist *A* weder wahr noch falsch sondern *undefiniert*.)

(1) (a) Der gegenwärtige König von Frankreich ist glatzköpfig.
(b) Der gegenwärtige König von Frankreich ist nicht glatzköpfig.
(c) Ist der gegenwärtige König von Frankreich glatzköpfig?
(d) Wenn der gegenwärtige König von Frankreich glatzköpfig ist, dann fresse ich einen Besen.

(e) Es gibt einen gegenwärtigen König von Frankreich.

(1) (a) - (d) präsupponiert (1) (e).

(2) (a) Maria bedauert, dass sie CL studiert hat.
(b) Maria bedauert nicht, dass sie CL studiert hat.
(c) Bedauert Maria, dass sie CL studiert hat?
(d) Wenn Maria bedauert, dass sie CL studiert hat, dann sollte sie sich in Informatik einschreiben.

(e) Maria hat CL studiert.

(2) (a) - (d) präsupponiert (2) (e)

Semantische Folgerung $\neq$ Präsupposition

(3) (a) Ludwig hatte im Semantik-Test alles richtig.
(b) Es war Ludwig, der im Semantik-Test alles richtig hatte.

(c) Jemand hatte im Semantik-Test alles richtig.

(a) $\models$ (c), aber (a) präsupponiert nicht (c),
(b) $\models$ (c), und (b) präsupponiert auch (c)

(4) (a) Es war nicht Ludwig, der im Semantik-Test alles richtig hatte.
(b) Jemand hatte im Semantik-Test alles richtig.

(a) präsupponiert (b), aber (a) $\not\models$ (b),
denn man kann die Präsupposition "ausschalten" (cancel) mit der folgenden Fortsetzung von (4) (a):

... . Ich weiss nämlich, dass niemand alles richtig hatte.

Dies ist allerdings nicht unumstritten.

Referentielle Bezüge und anaphorische Beziehungen

(1) (a) Wenn [sie]$_i$ anruft, sag [Theresa]$_i$ bitte, dass ich schwimmen gegangen bin.
(b) [Der Arzt]$_j$ bestand darauf, dass [er]$_j$ nichts ungewöhnliches gefunden hatte.
(c) Ich sprach mit [Franz]$_k$ eine Stunde lang, aber [der Idiot]$_k$ begriff nichts.

Koreferenz der Ausdrücke mit identischen Indizes.

(2) (a) [Jede Frau]$_i$ denkt, [sie]$_i$ sei eine bessere Erzieherin als [ihre]$_i$ Mutter.
(b) [Kein Mensch]$_j$ sollte [sich]$_j$ für die Fehler [seiner]$_j$ Kinder verantworten müssen.

Quantoren referieren nicht im eigentlichen Sinne, also auch keine Koreferenz möglich.

Bindung von Variablen.
$\forall$x: Frau x [x denkt, x sei eine bessere Erz. als x's Mutter]

"Disjoint Reference"

(3) (a) [Er]$_i$ bestand darauf, dass [der Arzt]$_j$ nichts Ungewöhnliches gefunden hatte.
(b) Wenn [der Idiot]$_i$ anruft, sag [Franz]$_j$ bitte, ich sei schon weg.

$i \neq j$; $i = j$ ist nicht zulässig.

(8) Wie bekommt ein Ausdruck seine Bedeutung zugeordnet?

Jede ernstzunehmende Sprache S ist *produktiv*, d.h. hat unendlich viele wohlgeformte Ausdrücke (die von einer Grammatik "generiert" werden müssen).

D.h. eine Semantik für S muss unendlich viele solcher Bedeutungsaussagen liefern:

$$[\![\alpha]\!]_S = \ldots$$

Eine Liste ist nicht möglich, da dies der *Lernbarkeit* (von natürlichen Sprachen zumindest) widerspräche.

Wir brauchen eine *endliche* Theorie, die *unendlich vielen* Ausdrücken eine Bedeutung zuweist.

Rekursive Mechanismen.

Im Prinzip vorstellbar:
Syntax und Semantik arbeiten vollkommen unabhängig voneinander. Jede Teiltheorie hat ihren eigenen rekursiven Mechanismus.

Dies ist jedoch unplausibel.

Wir lassen uns von dem Prinzip leiten, dass die Bedeutungszuweisung systematisch in Abhängigkeit von der syntaktischen Struktur des Ausdrucks geschieht.

Prinzip der Kompositionalität (Fregesches Prinzip)

Die Bedeutung eines syntaktisch komplexen Ausdrucks bestimmt sich aus der Bedeutung seiner Teile und deren Kombination.

Syntax und Semantik arbeiten parallel, "Hand in Hand" (*Homomorphismus* von syntaktischer in semantische Algebra).

Generelle Idee:

(a) Die Bedeutung atomarer Ausdrücke ist durch eine (endliche) Liste (Funktion) h gegeben.

(b) Für jede syntaktische Operation (Kombination) f wird in einer semantischen Operation g angegeben, wie sich die Bedeutung des komplexen Ausdrucks aus den Bedeutungen der Teile ergibt:

Sei γ ein Ausdruck der Sprache.

Dann gibt es 2 Fälle zu betrachten:

(a) γ ist atomar
(b) γ ist komplex, z.B. $\gamma = f(\alpha, \beta)$,
für eine synt. Op. f und zwei Ausdrücke α, β von S.

Im Fall (a): $[\![\gamma]\!] = h(\gamma)$

Im Fall (b): $[\![\gamma]\!] = [\![f(\alpha, \beta)]\!] = g([\![\alpha]\!] , [\![\beta]\!])$

wobei g eine semantische Operation, die der syntaktischen Operation f "entspricht".

Beispiele für f:

$f(\alpha, \beta)$ könnte z.B. sein

$\alpha\beta$	(einfache Verkettung, Konkatenation)
$\beta\alpha$	(umgekehrte Verkettung)
α's β	(Einfügen von "'s ")
$(\alpha \wedge \beta)$	(Einfügen von Klammern und Konnektiv)
α und β	(Einfügen von und)

Beispiele für g:

Seien a, b zwei "Bedeutungen".

g(a, b) könnte z.B. sein

a(b)	(funktionale Applikation; d.h. Anwendung der Funktion a auf das Argument b)
conj(a, b)	(Konjunktion von a und b, falls a und b Wahrheitswerte sind; wobei conj(W, W) = W und conj(W, F) = conj(F, W) = conj(F, F) = F)

Beispiele von syntaktischen Regeln:

Wenn α und β wohlgeformte Formeln (wffs) der AL sind, dann ist $f_\wedge(\alpha, \beta) = (\alpha \wedge \beta)$ auch eine wff.

Wenn α eine NP von S und β eine VP von S ist, dann ist $f(\alpha, \beta) = \alpha\beta$ ein Satz von S.

Sei $g_\wedge$ = conj und seien a und b die Wahrheitswerte von α und β, d.h. $[\![\alpha]\!]$ = a und $[\![\beta]\!]$ = b.

Dann errechnet sich die Bedeutung (der semantische Wert) der Konjunktion $(\alpha \wedge \beta)$ wie folgt:

$$[\![(\alpha \wedge \beta)]\!] = [\![f_\wedge(\alpha, \beta)]\!] = g_\wedge([\![\alpha]\!], [\![\beta]\!]) = \text{conj}(a, b)$$

(9) Arithmetisches Beispiel

Wohlgeformte Ausdrücke der Arithmetik

Beispiele: 5, 12, (5 + 12), ((5 *3) / 15), ...

3, 5, 12, 15, ... atomare Ausdrücke

Syntaktische Operationen:

$f_+(\alpha, \beta) = (\alpha + \beta)$

$f_-(\alpha, \beta) = (\alpha - \beta)$

$f_*(\alpha, \beta) = (\alpha * \beta)$

$f_/(\alpha, \beta) = (\alpha / \beta)$

g_+ = **add** (die Addition über **N** = {eins, zwei, drei, ... })

g_- = **sub** (die "Subtraktion" über **N**)

g_* = **mult** (die Multiplikation über **N**)

$g_/$ = **div** (die "Division" über **N**)

(Wie **sub** und **div** genau definiert sind, interessiert hier nicht; "im Grossen und Ganzen" sollen sie mit der üblichen Subtraktion und Division übereinstimmen.)

Die Bedeutung von arithmetischen Ausdrücken sollen natürliche Zahlen sein.

$$\left.\begin{array}{l} [\![1]\!] = h(1) = \text{eins} \\ [\![2]\!] = h(2) = \text{zwei} \\ [\![3]\!] = h(3) = \text{drei} \\ \ldots \end{array}\right\} \text{atomarer Fall}$$

$$\begin{aligned}
[\![((5 * 3) / 15)]\!] &= [\![f_/(f_*(5, 3), 15)]\!] \\
&= g_/([\![f_*(5, 3)]\!], [\![15]\!]) \\
&= g_/(g_*([\![5]\!], [\![3]\!]), [\![15]\!]) \\
&= \mathbf{div}(\mathbf{mult}([\![5]\!], [\![3]\!]), [\![15]\!]) \\
&= \mathbf{div}(\mathbf{mult}(h(5), h(3)), h(15)) \\
&= \mathbf{div}(\mathbf{mult}(\text{fünf, drei}), \text{fünfzehn}) \\
&= \mathbf{div}(\text{fünfzehn, fünfzehn}) \\
&= \text{eins}
\end{aligned}$$

(10) Lexikalische vs. strukturelle Semantik

Die lexikalische Semantik befasst sich mit der Bedeutung der Wörter, Morpheme (atomare Einheiten).

Die strukturelle Semantik befasst sich mit dem Problem, wie komplexe sprachliche Konstruktionen (Phrasen, Sätze, Texte) ihre Bedeutung erhalten.

Die strukturelle Semantik setzt natürlich die lexikalische Semantik voraus.

Frühe Ansätze der linguistischen Semantik gehören vornehmlich zur lexikalischen Semantik (z. B. dekompositionale Semantik), später trat die strukurelle Semantik in den Vordergrund (logische Semantik, Montague Semantik).

Wir beschäftigen uns in diesem Einführungskurs vornehmlich mit der strukturellen Semantik, werden aber gelegentlich auch einige Probleme der lexikalischen Semantik ansprechen.

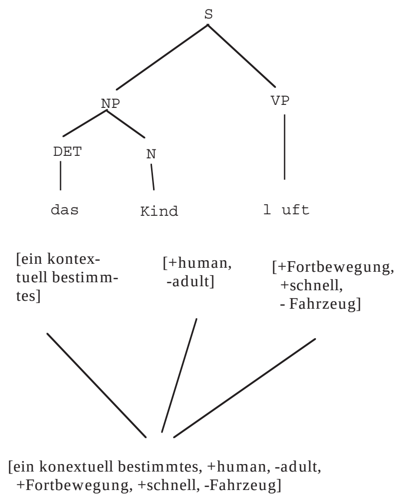
Illustration durch Katz-Fodor-Semantik:

Das Kind läuft.

das - [ein kontextuell bestimmtes]

Kind - [+human, -adult]

laufen - [+Fortbewegung, +schnell, -Fahrzeug]

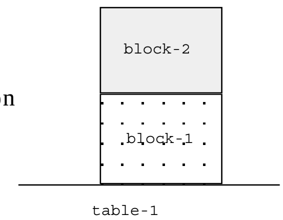


(11) Semantische Netze in der KI

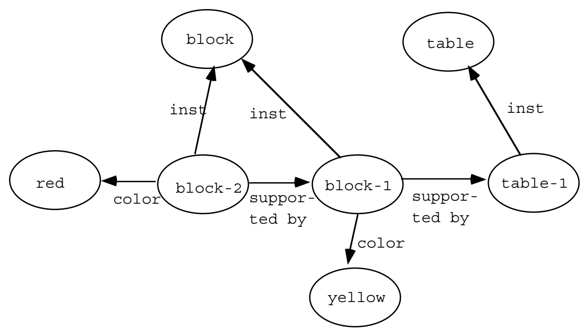
Terme werden als *Knoten* dargestellt

Relationen als *etikettierte gerichtete Kanten*

Folgende Situation

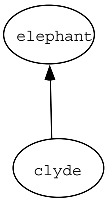


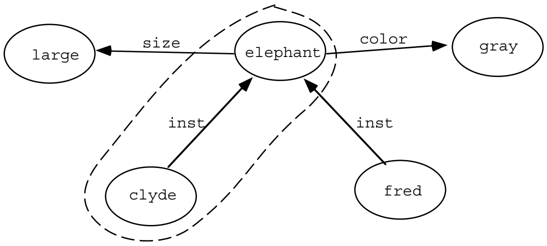
würde mit semantischen Netzen so dargestellt werden:



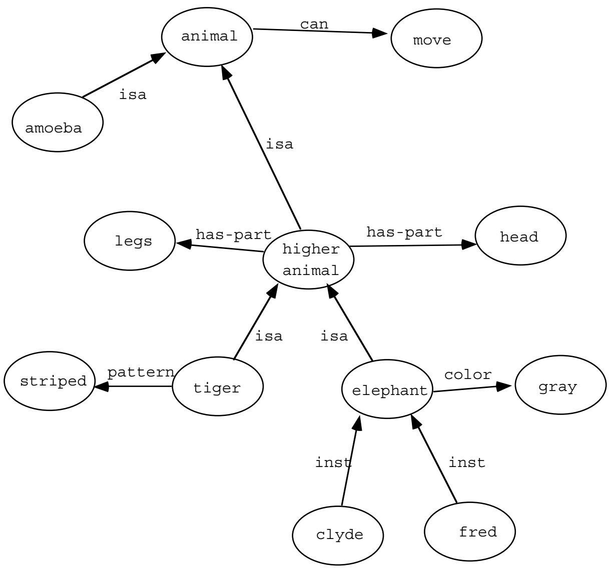
Vererbung von Eigenschaften:

Clyde is an elephant





Eine Isa-Hierarchie



Auf der Grundlage einer solchen Isa-Hierarchie lassen sich aus dem Satz Clyde is an elephant viele (nicht immer deduktive) Folgerungen ziehen, z.B. Clyde is gray and has a head.

(1) Zwei Arten von Semantik

Semantik im Symbolverarbeitungsparadigma

- Natürlich-sprachliche Bedeutung wird in einer semantischen Repräsentationssprache kodiert.
- Ausdrücke der semantischen Repräsentationssprache werden implizit durch ein System von Inferenzregeln interpretiert.
- Die Bedeutung eines Ausdrucks ist sein Inferenzpotential.

Probleme:

Fehlende Kontrolle über:

- die Adäquatheit der Repräsentationen
- die Korrektheit des Inferenzprozesses
- die Kombinatorik des Inferenzprozesses

Semantik im modelltheoretischen Paradigma

- Natürlich-sprachliche Bedeutung wird in einer semantischen Repräsentationssprache kodiert.
- Ausdrücke der semantischen Repräsentationssprache werden explizit durch die Zuweisung sprachexterner Denotate interpretiert.
- Die Bedeutung eines Satzes sind seine Wahrheitsbedingungen. Die Bedeutung von Satzgliedern besteht in der Art und Weise, in der sie zu den Wahrheitsbedingungen von Sätzen beitragen.

Kontrolle über:

- die Adäquatheit der Repräsentationen durch die Verfügbarkeit der Denotate
- das Inferenzsystem durch korrekte und vollständige Deduktionskalküle
- die Kombinatorik des Inferenzprozesses durch effiziente Theorembeweiser (???)

(2) Modelltheoretische Semantik

Prädikatenlogik 1. Stufe mit Identität, L_P

<u>Syntax</u> (Wohlgeformtheitsbedingungen)

D1. *Alphabet* von L_P

(1) *Logische Symbole*:

(i) ¬, ∧, ∨, → , ↔ (Junktoren, Konnektive)

(ii) ∃, ∀ (Quantorensymbole)

(iii) = (Identitätszeichen)

(2) *Individuenvariablen*.:

IV = {x, y, z, x_1, x_2, ...} unendlich viele

(3) *Nicht-logische Konstanten*:

(i) *Individuenkonstanten*.

IK = {a,b, c, a_1, a_2, ... } beliebige Menge

(ii) für jedes n ≥ 0 eine (möglicherweise leere) Menge n-stelliger Relationskonstanten

$RK_n = \{R^n_1, R^n_2, ...\}$

[RK_0 = {p, q, r, ... } Satzkonstanten
RK_1 = {F, G, H, ... } Prädikatskonstanten
RK_2 = {P, Q, R, ... } 2-stellige Relationskonstanten]

D2. Die Menge T der *Terme* von L_P ist IV ∪ IK .
(s, t, t_1, ...)

D3. *Formel* von L_P (wohlgeformter Ausdruck):

(1) $R^n t_1... t_n$, wenn $R^n \in RK_n$; $t_1,.., t_n \in$ T

(2) s = t , wenn s, t ∈ T

(3) ¬ A, (A ∧ B), (A ∨ B), (A → B), (A ↔ B), wenn A, B Formeln von L_P

(4) ∀ x A , ∃ x A, wenn x ∈ IV, A Formel von L_P

(5) Nichts sonst ist Formel von L_P

<u>Anm.:</u> Nach (1) und (2) gebildete Formeln heißen **atomare Formeln** oder **Atome;** in den nach (4) gebildeten Formeln heisst A der **Skopus** des (Vorkommens des) Quantors ∀ x oder ∃ x. Wir sagen auch: ein Quantor in der Variablen x (∀x oder ∃x) **bindet** genau die freien Vorkommen von x in seinem Skopus. (s.u.)

Freie Variablen

Ein Vorkommen einer Variablen x in einer Formel A heisst **frei**, wenn x weder unmittelbar hinter einem Quantorensymbol noch im Skopus eines Quantors ∀x oder ∃x steht. Alle anderen Vorkommen von x in A heissen **gebunden**. (Eine Variable x kann in einer Formel A sowohl frei als auch gebunden vorkommen.)

<u>Anm.:</u> Formeln, die keine freien (Vorkommen von) Variablen enthalten, heißen **Aussagen.**

Klammerkonvention:

Äußere Klammern können weggelassen werden.

∧, ∨ binden stärker als →, ↔

D4. Sei A eine Formel von L_P und x und y Individuenvariablen von L_P. Dann ist x **frei für** y in A gdw kein freies Vorkommen von y in A ist im Skopus eines Quantors ∀x oder ∃x.

Beispiele: y ist frei für x in ∀zPzx
z ist *nicht* frei für x in ∀zPzx

D5. Sei A[t'/t] das Resultat der **Substitution** von t' für t in A (d.h der Ersetzung jedes Vorkommens von t in A durch t').

D6. Sei A eine Formel von L_P von der Form ∀xB oder ∃xB und sei t ein Term von L_P. Dann nennen wir B[t/x] eine **Instanz** von A. Wir nennen B[t/x] eine **konservative Instanz** von A, falls A eine "leere" Quantifizierung ist oder t in A nicht vorkommt.

Notationelle Varianten für Quantoren:

(∀x) und (∃x),
(x) und (∃x) (z.B. in Thomason),
$\bigwedge_x$ und $\bigvee_x$ (oft in der deutschen Literatur),
Π_x und Σ_x (selten).

Beispiele (Formalisieren in L_P)

Es regnet $\boxed{P}$

Hans ist $\left\{\begin{array}{l}\text{intelligent}\\ \text{Student}\\ \text{arbeitet}\end{array}\right\}$ $\boxed{Fa}$

$\left.\begin{array}{l}\text{Vater von}\\ \text{kennt}\\ \text{hinter}\\ \text{größer als}\end{array}\right\}$ $\boxed{Rab}$

$\left.\begin{array}{l}\text{geben}\\ \text{zwischen}\end{array}\right\}$ $\boxed{R^3abc}$

Bremen ist <u>näher bei</u> Hamburg als Stuttgart bei München

$\boxed{R^4abcd}$

Peter ist intelligent	
Hans und Peter sind Studenten	$Fa \wedge Fb$
Hans und Peter sind Freunde	$Rab \wedge Rba$
Alle sitzen in einem Boot	$\exists x[Fx \wedge \forall y[Gy \rightarrow Ryx]]$
Jeder sitzt in einem Boot	$\forall y[Gy \rightarrow \exists x[Fx \wedge Ryx]]$
Jeder Mensch hat einen Fehler	
Einen Fehler hat jeder Mensch	
Peter hat genau ein Kind	$\exists x \forall y[Rya \leftrightarrow y = x]$
Nur Peter ist intelligent	$\forall x[Fx \leftrightarrow x = a]$

<u>Semantik</u> (Interpretation von Ausdrücken)

Modellstruktur für L_P

Eine <u>Modellstruktur</u> M für die Sprache der Prädikatenlogik 1.Stufe ist ein geordnetes Paar

$M = \langle U, V \rangle$, wobei

- $U \neq \emptyset$ ("Universum", "Individuenbereich")
- V (die "Wertzuweisungsfunktion") eine Abbildung, die den nicht-logischen Konstanten von L_P Werte zuweist derart, daß:

$V(R^n) \subseteq U^n$, R^n n-stellige Rel.konst. $(n \geq 1)$

$V(p) \in \{0, 1\}$ für Satzkonstanten p

$V(a) \in U$ für Individuenkonstanten a

Belegung

- Eine <u>Variablenbelegung</u> ist eine Abbildung

  $h\colon IV \rightarrow U$

- Für $a \in U$, x, y $\in IV$:

$$h\frac{\boldsymbol{a}}{x}(y) = \begin{cases} \boldsymbol{a}, \text{ falls } x=y \\ h(y) \text{ sonst} \end{cases}$$

Semantische Interpretation von Ausdrücken von L_P

Sei $M = \langle U, V \rangle$ eine Modellstruktur und h eine Belegungsfunktion:

(1) für Konstanten und Variablen

$[\![x]\!]^{M,h} = h(x)$ für $x \in IV$

$[\![a]\!]^{M,h} = V(a)$ für $a \in IK$

$[\![R^n]\!]^{M,h} = V(R^n)$ für $R^n \in RK_n$

(2) für atomare Formeln:

$[\![R^n\, t_1 \ldots t_n]\!]^{M,h} = 1$ **gdw.** $\langle [\![t_1]\!]^{M,h}, \ldots, [\![t_n]\!]^{M,h} \rangle \in [\![R^n]\!]^{M,h}$

$[\![s = t]\!]^{M,h} = 1$ **gdw.** $[\![s]\!]^{M,h} = [\![t]\!]^{M,h}$

(3) für komplexe Formeln:

$[\![\neg A]\!]^{M,h} = 1$ **gdw.** $[\![A]\!]^{M,h} = 0$

$[\![A \wedge B]\!]^{M,h} = 1$ **gdw.** $[\![A]\!]^{M,h} = 1$ **und** $[\![B]\!]^{M,h} = 1$

$[\![A \vee B]\!]^{M,h} = 1$ **gdw.** $[\![A]\!]^{M,h} = 1$ **oder** $[\![B]\!]^{M,h} = 1$

$[\![A \rightarrow B]\!]^{M,h} = 1$ **gdw.** $[\![A]\!]^{M,h} = 0$ **oder** $[\![B]\!]^{M,h} = 1$

$[\![A \leftrightarrow B]\!]^{M,h} = 1$ **gdw.** $[\![A]\!]^{M,h} = [\![B]\!]^{M,h}$

(4) für quantifizierte Formeln:

$[\![\forall xA]\!]^{M,h} = 1$ **gdw.** $[\![A]\!]^{M,h_x^a} = 1$ **für alle** $a \in U$

$[\![\exists xA]\!]^{M,h} = 1$ **gdw.** $[\![A]\!]^{M,h_x^a} = 1$ **für mind. ein** $a \in U$

Wichtige semantische Begriffe

Es sei A Formel von L_P, M = <U,V> Modellstruktur für L_P, h Belegung.

- A ist <u>wahr in M relativ zu h</u>

  gdw. $[\![A]\!]^{M,h} = 1$

- A ist <u>wahr in M</u>

  gdw. $[\![A]\!]^{M,h} = 1$ für jede Belegung h

- A ist <u>gültig</u> (in L_P) : $\vDash_{L_P} A$ bzw. $\vDash A$

  gdw. A wahr in jeder Modellstruktur M für L_P

- A ist <u>erfüllbar</u> (in L_P)

  gdw. A wahr in mindestens einer Modellstruktur M für L_P

Es sei Γ Formelmenge, A Formel von L_P, M = <U,V> Modellstruktur für L_P, h Belegung.

- M <u>erfüllt</u> Γ (gleichzeitig) oder: M ist <u>Modell</u> von Γ

  gdw. jede Formel $A \in \Gamma$ wahr in M ist

- Γ ist (gleichzeitig) <u>erfüllbar</u> (in L_P)

  gdw. Γ ein Modell M (in L_P) besitzt.

- Γ ist un<u>erfüllbar</u> (in L_P)

  gdw. Γ kein Modell M (in L_P) besitzt.

- A <u>folgt</u> (in L_P) aus Γ: $\Gamma \vDash_{L_P} A$ bzw. $\Gamma \vDash A$

  gdw. A in jedem Modell für Γ wahr ist.

Beweistheorie

Deduktionssysteme (Kalküle) für die Prädikatenlogik 1. Stufe

Für die klassische Prädikatenlogik gibt es <u>eine</u> Semantik und <u>einen</u> Folgerungsbegriff, aber eine Vielzahl von Deduktionssystemen, z.B.:

Axiomatische Kalküle (z.B. Hilbert)

Kalküle des natürlichen Schließens (Gentzen, Fitch)

semantische Tableaux (Beth)

Resolutionskalkül (Robinson)

<u>Beispiel:</u> Hilberts System für die Aussagenlogik H_S

H_S besitzt drei *Axiomenschemata* .

AS1. $A \rightarrow (B \rightarrow A)$
AS2. $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$
AS3. $(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$

Ein *Axiom* entsteht durch Substitution der Metavariablen A, B und C durch Formeln von L_A.

Es gibt in H_S genau eine *Ableitungsregel*, nämlich Modus Ponens:

$$\frac{A \qquad A \rightarrow B}{B}$$

Wichtige deduktionstheoretische Begriffe

- Ein <u>Beweis</u> (in H_S) von A ist eine Folge $A_1, \ldots, A_n$ von Formeln, für die gilt, daß $A_n = A$ und jedes A_i ($1 \le i \le n$) entweder
  (i) Axiom (von H_S) ist oder
  (ii) aus zwei vorhergehenden Formeln durch Modus Ponens gewonnen wurde.

- Eine Formel A ist <u>beweisbar</u> (in H_S) (ein *Theorem*):
  $\vdash A$ gdw. es gibt einen Beweis (in H_S) von A.

- Eine <u>Ableitung</u> (in H_S) von A aus der Formelmenge Γ ist Folge $A_1, \ldots, A_n$ von Formeln von H_S, für die gilt, daß $A_n = A$ und jedes A_i ($1 \le i \le n$) entweder
  (i) Axiom (von H_S) oder
  (ii) Element von Γ (Hypothese)
  (iii) aus zwei vorhergehenden Formeln durch Modus Ponens gewonnen wurde.

- Eine Formel *A* ist <u>ableitbar</u> aus Γ (in H_S):
  $\Gamma \vdash A$ gdw. es eine Ableitung von *A* aus Γ gibt.

- Die Formelmenge Γ ist <u>inkonsistent</u> (in H_S) gdw. es eine Formel *A* mit $\Gamma \vdash A$ und $\Gamma \vdash \neg A$ gibt.

- Die Formelmenge Γ ist <u>konsistent</u> (widerspruchsfrei) in H_S gdw Γ ist nicht inkonsistent in H_S

Deduktion, Beispiele

- Eine Ableitung in H_S:

$$\neg p \to \neg q, q \quad \vdash \quad p$$

(1) $(\neg p \to \neg q) \to (q \to p)$	AS3: p / A, q / B
(2) $\neg p \to \neg q$	Hyp.
(3) $q \to p$	MP 1, 2
(4) q	Hyp.
(5) p	MP 3, 4

- Ein Beweis in H_S:

$$\vdash \quad p \to p$$

(1) $p \to ((p \to p) \to p)$	AS1
(2) $(p \to ((p \to p) \to p)) \to ((p \to (p \to p)) \to (p \to p))$	AS2
(3) $(p \to (p \to p)) \to (p \to p)$	MP 1, 2
(4) $p \to (p \to p)$	AS1
(5) $p \to p$	MP 3, 4

Korrektheit und Vollständigkeit von Kalkülen

Ein Deduktionskalkül mit Beweis- / Ableitbarkeits-relation $\vdash$ ist <u>semantisch korrekt</u>, wenn für alle Formeln A und Formelmengen Γ gilt:

Wenn $(\Gamma) \vdash A$, so $(\Gamma) \models A$.

Ein Deduktionskalkül mit der Beweis- / Ableitbar-keitsrelation $\vdash$ ist <u>semantisch vollständig</u>, wenn für alle Formeln A und Formelmengen Γ gilt:

Wenn $(\Gamma) \models A$, so $(\Gamma) \vdash A$.

Satz (ohne Beweis): Der Kalkül H_S ist korrekt und vollständig.

<u>Kontrolle des Inferenzprozesses durch Interpretation:</u>

In einem korrekten und vollständigen Deduktions-system sind $\vdash$ und $\models$ deckungsgleich. Durch Ablei-tung (Inferenz) sind von einer wahren Prämissen-menge / Datenbasis aus alle wahren Formeln und nur die wahren Formeln erreichbar.

Inferenzpotential und Wahrheitsbedingungen determinieren sich gegenseitig.

Konsistenz

- Eine Formelmenge Γ ist <u>inkonsistent</u> gdw.

  es eineFormel A gibt mit: $\Gamma \vdash A$ and $\Gamma \vdash \neg A$.

- Inkonsistenz einer Datenbasis ist gefährlich:

  Wenn Γ inkonsistent, gilt $\Gamma \vdash B$, für jede Formel B.

- Konsistenz einer Datenbasis kann durch die Konstruktion eines Modells gezeigt werden:

  Wenn $\vdash$ korrekt und vollständig, gilt:

  Γ ist konsistent gdw. Γ ist erfüllbar

Logische Repräsentation lexikalischer Bedeutung

- Übersetzung in logische Symbole:

  Beispiele: *und, alle, nicht*

- Umschreibung mittels logischer Symbole

  Beispiele: *nur, genau zwei*

- Spezifikation durch Bedeutungspostulate

  Beispiel: $\forall x \forall y$ (grenzt-an(x,y) $\leftrightarrow$ grenzt-an(y,x))

Bedeutungspostulate haben in der Deduktion die Rolle von zusätzlichen Axiomen / Prämissen; in der Semantik schränken sie den Begriff der Modell-struktur zusätzlich ein.

Bedeutungspostulate erlauben die graduelle Spezifikation von Bedeutungseigenschaften und von Bedeutungsrelationen.

Bedeutungspostulate

- <u>Hyponymie:</u>

  $\forall x$ (Mensch(x) $\to$ Lebewesen(x))

- <u>Inverse Relationen:</u>

  $\forall x \forall y$ (Lehrer(x,y) $\leftrightarrow$ Schüler(y,x))

- Entsprechungen thematischer Rollen:

  $\forall x\ \forall y\ \forall z(\text{geben}(x,y,z) \leftrightarrow \text{erhalten}(y,z,x))$

- Teil-von-Beziehung:

  $\forall x\ (\text{Stuhl}(x) \rightarrow \exists y\ (\text{Lehne}(y) \wedge \text{Teil-von}(y,x)))$

Strukturеigenschaften zweistelliger Relationen:

- Reflexivität / Irreflexivität

  $\forall x\ Rxx$ / $\forall x\ \neg Rxx$

- Symmetrie / Asymmetrie

  $\forall x \forall y\ (Rxy \leftrightarrow Ryx)$ / $\forall x \forall y\ (Rxy \leftrightarrow \neg Ryx)$

- Antisymmetrie

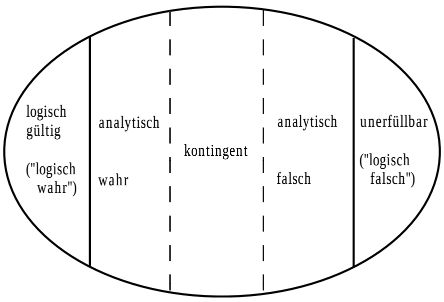
  $\forall x \forall y\ (Rxy \wedge Ryx \rightarrow x=y)$

- Transitivität

  $\forall x \forall y \forall z(Rxy \wedge Ryz \rightarrow Rxz)$

Logische und "analytische" Eigenschaften

Formeln von L_P



- **Normalformen (DNF, KNF)**

- **Algorithmus zur Umformung von Formeln in NF** (siehe separates Handout)

- **Resolution** (siehe separates Handout)

- **Probleme der Prädikatenlogik 1. Stufe als semantische Repräsentationssprache**

Aussagenlogische Äquivalenzen

1. Doppelte Negation:

(a) $\neg\neg A$ ist äquivalent mit A

2. De Morgan´sche Gesetze:

(a) $\neg(A \vee B)$ ist äquivalent mit $\neg A \wedge \neg B$

(b) $\neg(A \wedge B)$ ist äquivalent mit $\neg A \vee \neg B$

3. Äquivalenz von Konnektiven:

(a) $A \vee B$ ist äquivalent mit $\neg A \rightarrow B$

(b) $A \rightarrow B$ ist äquivalent mit $\neg A \vee B$

(c) $A \wedge B$ ist äquivalent mit $\neg(A \rightarrow \neg B)$

(d) $A \rightarrow B$ ist äquivalent mit $\neg(A \wedge \neg B)$

(e) $A \rightarrow (B \rightarrow C)$ ist äquivalent mit $(A \wedge B) \rightarrow C$

(f) $A \leftrightarrow B$ ist äquivalent mit $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$

4. Kontraposition:

(a) $A \rightarrow B$ ist äquivalent mit $\neg B \rightarrow \neg A$

(b) $\neg A \rightarrow B$ ist äquivalent mit $\neg B \rightarrow A$

(c) $A \rightarrow \neg B$ ist äquivalent mit $B \rightarrow \neg A$

5.Kommutativität:

(a) $A \vee B$ ist äquivalent mit $B \vee A$

(b) $A \wedge B$ ist äquivalent mit $B \wedge A$

(c) $A \leftrightarrow B$ ist äquivalent mit $B \leftrightarrow A$

6. Assoziativität:

(a) $A \vee (B \vee C)$ ist äquivalent mit $(A \vee B) \vee C$

(b) $A \wedge (B \wedge C)$ ist äquivalent mit $(A \wedge B) \wedge C$

(a) $A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C)$ ist äquivalent mit $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow C$

7. Distributivität:

(a) $A \vee (B \wedge C)$ ist äquivalent mit $(A \vee B) \wedge (A \vee C)$

(b) $A \wedge (B \vee C)$ ist äquivalent mit $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

(c) $A \rightarrow (B \wedge C)$ ist äquivalent mit $(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C)$

(d) $A \rightarrow (B \vee C)$ ist äquivalent mit $(A \rightarrow B) \vee (A \rightarrow C)$

(e) $(A \vee B) \rightarrow C$ ist äquivalent mit $(A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C)$ **!!!**

(f) $(A \wedge B) \rightarrow C$ ist äquivalent mit $(A \rightarrow C) \vee (B \rightarrow C)$ **!!!**

8. Absorption:

(a) $A \vee (A \wedge B)$ ist äquivalent mit A

(b) $A \wedge (A \vee B)$ ist äquivalent mit A

9. Verum und Falsum:

(a) $A \wedge (B \vee \neg B)$	ist äquivalent mit	A
(b) $A \vee (B \wedge \neg B)$	ist äquivalent mit	A
(c) $A \vee (B \vee \neg B)$	ist äquivalent mit	$B \vee \neg B$
(d) $A \wedge (B \wedge \neg B)$	ist äquivalent mit	$B \wedge \neg B$

10. Idempotenz:

(a) $A \vee A$	ist äquivalent mit	A
(a) $A \wedge A$	ist äquivalent mit	A

Prädikatenlogische Äquivalenzen und Implikationen

1. Quantoren und Negation:

$\neg \forall xA$	ist äquivalent mit	$\exists x \neg A$
$\neg \exists xA$	ist äquivalent mit	$\forall x \neg A$
$\exists xA$	ist äquivalent mit	$\neg \forall x \neg A$
$\forall xA$	ist äquivalent mit	$\neg \exists x \neg A$

2. Quantoren und Quantoren:

$\forall x \forall yA$	ist äquivalent mit	$\forall y \forall xA$	
$\exists x \exists yA$	ist äquivalent mit	$\exists y \exists xA$	
$\exists x \forall yA$	impliziert logisch	$\forall y \exists xA$	nicht umgekehrt!

3. Quantoren und Konnektive:

$\forall x[A \wedge B]$	ist äquivalent mit	$\forall xA \wedge \forall xB$	
$\exists x[A \vee B]$	ist äquivalent mit	$\exists xA \vee \exists xB$	
$\forall xA \vee \forall xB$	impliziert logisch	$\forall x[A \vee B]$	nicht umgekehrt!
$\exists x[A \wedge B]$	impliziert logisch	$\exists xA \wedge \exists xB$	nicht umgekehrt!

$\forall x[A \wedge B]$	ist äquivalent mit	$\forall xA \wedge B$
$\forall x[A \vee B]$	ist äquivalent mit	$\forall xA \vee B$
$\exists x[A \wedge B]$	ist äquivalent mit	$\exists xA \wedge B$
$\exists x[A \vee B]$	ist äquivalent mit	$\exists xA \vee B$
$\forall x[A \rightarrow B]$	ist äquivalent mit	$\exists xA \rightarrow B$
$\exists x[A \rightarrow B]$	ist äquivalent mit	$\forall xA \rightarrow B$
$\forall x[B \rightarrow A]$	ist äquivalent mit	$B \rightarrow \forall xA$
$\exists x[B \rightarrow A]$	ist äquivalent mit	$B \rightarrow \exists xA$

Umformungen in Normalformen

Normalformen

Konjunktive Normalform (KNF):

Eine Formel A der Aussagenlogik (quantoren-freie Formel von L_P) ist in konjunktiver Normalform (KNF):

A hat die Form $B_1 \wedge \ldots \wedge B_n$,

jedes B_i hat die Form $C_{i1} \vee \ldots \vee C_{im_i}$,

jedes C_{ij} ist Literal.

Disjunktive Normalform (DNF):

Eine Formel A der Aussagenlogik (quantoren-freie Formel von L_P) ist in disjunktiver Normalform (DNF):

A hat die Form $B_1 \vee \ldots \vee B_n$,

jedes B_i hat die Form $C_{i1} \wedge \ldots \wedge C_{im_i}$,

jedes C_{ij} ist Literal.

Pränexe Normalform (PNF):

Eine Formel A von L_P ist in pränexer Normalform (PNF):

A hat die Form $Q_1x_1 \ldots Q_nx_n$ B,

alle Q_i sind Quantoren, x_i sind Individuenvariablen und B ist quantorfreie Formel.

Normalform-Umformungen

Für jede Formel der Aussagenlogik (quantoren-freie Formel von L_P) gibt es eine äquivalente Formel in KNF (DNF).

Für jede Formel von L_P gibt es eine äquivalente Formel in pränexer Normalform.

KNF-Überführung:

- Äquivalenz und Implikation eliminieren
- Negation nach innen treiben
- Konjunktion über Disjunktion anheben

  (DNF: Disjunktion über Konjunktion)

PNF-Überführung:

- Quantoren nach außen treiben
- ggf. Variablen umbenennen

Resolution als Inferenzmethode (AL)

0. Literaturhinweise

Lewis ∧ Papadimitriou 1981, *Elements of the Theory of Computation*. Englewood Cliffs, N.J., Prentice Hall. Kapitel 8 (8.7).

1. Allgemeines zur Resolution

Resolution ist eine effinziente Methode, Inferenzen aus Formelmengen zu erhalten. Sie wurde besonders von informatisch orientierten Logikern entwickelt. (In den üblichen Lehrbüchern der mathematischen Logik findet man nichts über Resolution; oft ist dieser Terminus nicht einmal im Index aufgeführt.) Als Erfinder gilt der Logiker J. A. Robinson.

2. Konjunktive Normalform (KNF)

Man geht aus von der Konjunktiven Normalform (KNF) einer Formel. Dies ist eine Konjunktion von Disjunktionen, deren jedes Disjunkt ein Literal ist, also eine Aussagenvariable P oder die Negation einer solchen, ¬P. Also allgemein:

$(L_{11} \vee L_{12} \vee ... \vee L_{1n}) \wedge (L_{21} \vee L_{22} \vee ... \vee L_{2m}) \wedge .... \wedge (L_{k1} \vee L_{k2} \vee ... \vee L_{kl})$

Solch eine KNF kann, wegen Kommutativität von ∧ und ∨, auch als Menge von Mengen von Literalen dargestellt werden. Also

$\{\{L_{11}, L_{12}, ..., L_{1n}\}, \{L_{21}, L_{22}, ..., L_{2m}\}, ..., \{L_{k1}, L_{k2}, ..., L_{kl}\}\}$

Man sagt auch: eine Menge von Klauseln (oder Klauselmenge); eine Klausel ist dabei eine Menge von Literalen, die einem Konjunkt in KNF entspricht.

Beispiel:

(A ∨ B ∨ ¬C) ∧ (¬B ∨ C ∨ ¬A) ∧ (D ∨ E)

entspricht der Klauselmenge

{{A, B, ¬C}, {¬B, C, ¬A}, {D, E}}

{A, B, ¬C} ist dabei eine Klausel dieser Menge.

3. Die leere Klausel

Es gibt auch die leere Klausel, □. (Es ist die Klausel, die keine Elemente hat, also die leere Menge von Literalen.)

4. Semantische Eigenschaften von Klauselmengen

Klauselmengen können, genau wie die ihnen entsprechenden Formeln, gültig, erfüllbar, unerfüllbar, etc. sein. Dies wird ebenfalls durch Belegungen definiert.

Eine Belegung erfüllt z.B. die obige Klauselmenge, wenn sie jede Klausel erfüllt, und sie erfüllt z.B. die erste Klausel, wenn sie entweder A oder B erfüllt (wahr macht), oder C nicht erfüllt (also falsch macht).

5. Äquivalenz von Klauselmengen

Eine Belegung, die die Klauselmenge {{¬A, B}, {A}} erfüllt, erfüllt auch die Klausel {B}. Wir sagen dann, dass die Klauselmenge {{¬A, B}, {A}} die Klausel {B} logisch impliziert. Wenn man die implizierten Klauseln zu einer Klauselmenge hinzunimmt, resultiert eine logisch äquivalente Klauselmenge. D.h. {{¬A, B}, {A}} und {{¬A, B}, {A}, {B}} sind äquivalent. (Der obige Schluss ist übrigens nichts anderes als Modus Ponens in Klauselform.)

6. Resolvent

Ein *Resolvent* von zwei Klauseln *A* und *B*, von denen eine eine Aussagenvariable P enthält und die andere die Negation dieser Aussagenvariablen ¬P, ist die Vereinigung dieser zwei Mengen abzüglich {P, ¬P}, also *A* ∪ *B* - {P, ¬P}. Z.B. ist {B} der Resolvent der Klauselmenge {{¬A, B}, {A}}. Man kann zeigen, dass die Vereinigung eines Resolventen zweier Klauseln (es kann mehrere geben) mit der Klauselmenge äquivalent ist. (Siehe Beispiel unter 5.)

Noch ein Beispiel: {{ ¬B, C, ¬D}, {¬C, ¬D}}

Der Resolvent dieser 2-elementigen Klauselmenge ist {¬B, ¬D}. Wir müssen also zeigen, dass jede Belegung, die {{ ¬B, C, ¬D}, {¬C, ¬D}} erfüllt, auch den Resolventen {¬B, ¬D} erfüllt. (Die Umkehrung ist trivial.)

<u>Beweis:</u> indirekt!

1. Sei ∨ eine Belegung, die {{ ¬B, C, ¬D}, {¬C, ¬D}} erfüllt, aber {¬B, ¬D} nicht erfüllt.

2. Dann macht ∨ sowohl B als auch D wahr: V(B) = 1 und V(D) = 1.

3. Um {{ ¬B, C, ¬D}, {¬C, ¬D}} zu erfüllen, muss ∨ beide Klauseln erfüllen.

4. D.h. um { ¬B, C, ¬D} zu erfüllen, musss für ∨ gelten: V(B) = 0 oder V(C) = 1 oder V(D) = 0. Da V(B) = V(D) = 1, muss gelten: V(C) = 1.

5. Um {¬C, ¬D} zu erfüllen, muss für ∨ gelten: V(C) = 0 oder V(D) = 0. Da V(D) = 1, muss gelten V(C) = 0.

6. Also bekommen wir: V(C) = 1 und V(C) = 0, was nicht sein kann.

7. Also folgt, dass {{ ¬B, C, ¬D}, {¬C, ¬D}} äquivalent ist mit {{ ¬B, C, ¬D}, {¬C, ¬D}, {¬B, ¬D}}. ■

7. Unerfüllbarkeit von Klauselmengen

Eine Klauselmenge, die sowohl {P} als auch {¬P} - für eine Aussagenvariable P - als Klauseln, und damit ihren Resolventen □ enthält, ist unerfüllbar. (Es ist klar, dass es keine Belegungen geben kann, die sowohl P als auch ¬P erfüllen.)

Mit andern Worten, eine Klauselmenge S, die die leere Klausel logisch impliziert (S $\models$ □) - also gewissermassen einen Widerspruch impliziert - ist unerfüllbar. (Ihre Folgerungsmenge enthält ja dann auch die leere Klausel.)

8. Resolution als Ableitungsregel

Was oben semantisch charakterisiert wurde, kann man auch syntaktisch, d.h. *beweistheoretisch* bestimmen. Dazu führt man ein *Ableitungs-* oder *Inferenzsystem* ein. Dieses System besitzt eine einzige Regel, nämlich die *Resolutionsregel*. Sie hat zwei Prämissen, nämlich zwei Klauseln, und als Konklusion einen Resolventen dieser zwei Klauseln.

In diesem System lassen sich *Ableitungen* aus einer Klauselmenge S auf folgende Weise konstruieren:

Ableitungen in diesem System sind endliche Folgen von Klauseln, jedes Element dieser Folge auf eine Zeile geschrieben. Jede Zeile einer solchen Ableitung muss entweder ein Element aus S sein, oder durch eine Anwendung der Resolutionsregel auf zwei vorhergehende Zeilen in die Ableitung gelangt sein, d.h. ein Resolvent dieser zwei vorhergehenden Klauseln sein. (Dabei darf ein und dieselbe Klausel in mehr als einem Schritt als Prämisse verwendet werden.)

Sei *A* eine Ableitung aus einer Klauselmenge S. Wenn *A* die letzte Zeile (Klausel) von *A* ist, dann sagt man, dass *A* eine Ableitung von *A* aus S ist. Gibt es eine Ableitung von *A* aus S, so sagt man, dass *A* (im System) *aus* S *ableitbar* ist (S $\vdash$ *A*).

Offensichtlich gilt für dieses System:

$$S \vdash A \quad \text{gdw} \quad S \models A$$

Daraus ergibt sich, dass eine Klauselmenge S unerfüllbar ist, wenn □ aus S ableitbar ist, d.h. S $\vdash$ □.

9. Beispiel

S = {{A, B, ¬C}, {¬A}, {A, B, C}, {A, ¬B}} $\vdash$ □

Ableitung von □ aus S:

1.	{A, B, ¬C}	∈ S
2.	{A, B, C}	∈ S
3.	{A, B}	Resolvent von 1 und 2
4.	{A, ¬B}	∈ S
5.	{A}	Resolvent aus 3 und 4
6.	{¬A}	∈ S
7.	□	Resolvent aus 5 und 6

10. Eine Anwendung der Resolutionsmethode

Man kann Resolution auch verwenden, um zu zeigen, dass eine Menge von Formeln Γ eine Formel *A* logisch impliziert, und zwar auf Grund der Vollständigkeit und Korrektheit der Methode und der Äquivalenz:

$$\Gamma \models A \quad \text{gdw} \quad \Gamma \cup \{\neg A\} \text{ ist nicht erfüllbar.}$$

Dazu bildet man zunächst die KNF, die Γ ∪ {¬A} entspricht, erzeugt dann die entsprechende Klauselmenge und zeigt schliesslich, dass aus dieser Klauselmenge die leere Klausel ableitbar ist.

Das Beispiel in 9 zeigt, dass

$\{(A \vee (B \vee \neg C)), ((A \vee B) \vee C), (B \rightarrow A)\} \models A$

Probleme der prädikatenlogischen Bedeutungsanalyse

- Probleme der Bedeutungsrepräsentation
- zu einfache Modelle (extensional)

=> Problem: intensionale Ausdrücke

Der Bundeskanzler wechselt

Hans sucht ein Einhorn

- zu einfache, zu ausdrucksschwache Sprache (1. Stufe)

=> Probleme:
- Prädikatenprädikate
- nicht-prädikative Audrücke
- Satzoperatoren etc.

- Probleme der Bedeutungskomposition

z.B.

Jeder Mensch hat einen Fehler

$$\forall x\ (\text{Mensch}'(x) \rightarrow \exists y\ (\text{Fehler}'(y) \wedge \text{hat}'(x, y)))$$

Prädikatenlogik 2. Stufe

Beispiel:

Prädikat zweiter Stufe $\mathcal{N}$

Prädikatsvariable: F

Prädikatskonstante: I

Individuenkonstante: p

Peter ist intelligent	$\mathbf{I(p)}$
Intelligenz ist eine nützliche Eigenschaft	$\mathbf{\mathcal{N}(I)}$
______________________________	______
Peter hat eine nützliche Eigenschaft	$\exists\ \mathbf{F(\mathcal{N}(F) \wedge F(p}$

Peter hat nur nützliche Eigenschaften	$\forall \mathbf{F(\mathcal{N}(F) \rightarrow F(}$
Peter ist intelligent	$\mathbf{I(p)}$
______________________________	________
Intelligenz ist eine nützliche Eigenschaft	$\mathbf{\mathcal{N}(I)}$

Das Substitutionsproblem

Aus dem <u>Kompositionalitätsprinzip</u>:

Die Bedeutung eines Satzes ist determiniert durch die Bedeutung seiner Teilausdrücke und deren syntaktische Verknüpfung.

ergibt sich unmittelbar das <u>Substitutionsgesetz</u>:

Bedeutungsgleiche Ausdrücke können in einem Satz ausgetauscht werden, ohne daß sich der Wahrheitswert des Satzes ändert ("salva veritate").

Wenn wir Bedeutungen mit Denotaten der Standardprädikatenlogik gleichsetzen, liefert das Substitutionsgesetz in bestimmten Fällen ("intensionale Ausdrücke/Kontexte") falsche Schlüsse.

<u>Mögliche Konsequenzen</u>:

- Aufgabe des Kompositionalitätsprinzips
- Trennung zwischen (formalem) Denotat und (intuitiver) Bedeutung
- Methode der Modal- und Temporallogik: Differenzierung des formalen Interpretationsbegriffs

Substitutionsbeispiele

Der Bundeskanzler hat die Richtlinienkompetenz.

<u>*Der Bundeskanzler ist Helmut Kohl.*</u>

Helmut Kohl hat die Richtlinienkompetenz.

Der Bundeskanzler hat immer die Richtlinienkompetenz.

<u>*Der Bundeskanzler ist Helmut Kohl.*</u>

?? *Helmut Kohl hat immer die Richtlinienkompetenz.*

Helmut Kohl hat immer Übergewicht

<u>*Helmut Kohl ist der Bundeskanzler*</u>

?? *Der Bundeskanzler hat immer Übergewicht*

Es ist nicht der Fall, daß Peter ständig arbeitet.

<u>*Peter hat Erfolg genau dann, wenn er ständig arbeitet.*</u>

Es ist nicht der Fall, daß Peter Erfolg hat.

Es ist nicht schön, daß Peter ständig arbeitet.

<u>*Peter hat Erfolg genau dann, wenn er ständig arbeitet.*</u>

?? *Es ist nicht schön, daß Peter Erfolg hat.*

Gestern haben wir einen Fisch gekauft.

<u>*Heute wird gegessen, was wir gestern gekauft haben*</u>

Heute wird ein Fisch gegessen.

Gestern haben wir einen frischen Fisch gekauft.

<u>*Heute wird gegessen, was wir gestern gekauft haben.*</u>

?? *Heute wird ein frischer Fisch gegessen.*

Intensionale Ausdrücke und Konstruktionen

- <u>Zeitadverbien und Tempus</u>

Futur, Präteritum; *gestern, morgen, früher, bald; 1995, zwischen 2 und 4 Uhr; immer, manchmal; bevor, nachdem*

Der Dollarkurs hat 1990 zum ersten Mal die Marke von 1,60 DM unterschritten.

der bisher tiefste Stand des Dollarkurses

- Modalverben, - adverbien, Irrealer Konditional

möglicherweise, notwendig, müssen, können, dürfen

Wenn der Dollarkurs die Marke von 1,50 DM unterschritten hätte, . . .

- Einstellungsverben und -konstruktionen

wissen, glauben; es ist bekannt, daß ... ;
hoffen, fürchten; es ist schön, daß ...

Nicht-prädikative Ausdrücke:

- **Attributive Adjektive**

Peter ist ein promovierter Logiker

Peter ist ein leidenschaftlicher Logiker

- **Ereignismodifikatoren**

Französische Wagen fahren schnell

Französische Wagen rosten schnell

- **Gradmodifikatoren**

Französische Wagen rosten ziemlich schnell

Peter ist ein sehr guter Logiker

Zeitlogik

Zeitlogische Modellstruktur

Eine Modellstruktur für die Sprache der temporalen Prädikatenlogik (L_{PT}) ist ein Quadrupel

M = < U , T , < , V >, wobei

(1) (i) U ≠ Ø (Individuenbereich)
(ii) T ≠ Ø (Menge der Zeitpunkte)
(iii) T ∩ U = Ø
(iv) < lineare Ordnung über T

(2) V eine Abbildung mit:

(i) $V(a) : T \rightarrow U$ für $a \in IK$
(ii) $V(p): T \rightarrow \{ 0 , 1 \}$ für Satzkonstanten p (∈ RK_0)
(iii) $V(R^n) : T \rightarrow P (U^n)$ für $R^n \in RK_n$

(alternativ: V eine Abbildung von Paaren von nicht-logischen Konstanten und Zeitpunkten in Standarddenotate, z.B.: V(a,t) ∈ U)

Modellstruktur für L_{PT}:

Beispiel

V(α)(t) [bzw. V(α, t)]

t: / α:	t_1	t_2	t_3
Hans	h	h	h
Peter	p	p	p
Maria	m	m	m
der-Präsident	h	h	p
schläft	{h,p,m}	{h,m}	{p}
es-regnet	1	0	0

Sprache der temporalen Prädikaten-logik L_{PT}:

- Alphabet von L_{PT}:

  wie das Alphabet von L_P;

  zusätzliche logische Konstanten:

  F: es wird (einmal) der Fall sein, daß

  P: es war (einmal) der Fall, daß

  G: es wird immer der Fall sein, daß

  H: es war immer der Fall, daß

- Formel von L_{PT}:

  wie Formel von L_P;

  zusätzliche Klausel:

  Wenn A Formel von L_{PT}, so auch

  FA, **P**A, **G**A, **H**A

Interpretation für L_{PT}

Sei M = < U , T, < , V > eine Modellstruktur für L_{PT} und h eine Belegungsfunktion:

(1) Konstanten und Variablen:

$[[x]]^{M,t,h} = h(x)$ für $x \in IV$

$[[a]]^{M,t,h} = V(a)(t)$ für $a \in IK$

$[[R^n]]^{M,t,h} = V(R^n)(t)$ für $R^n \in RK_n$

(2) atomare Formeln:

$[[R^n\ t_1 \ldots t_n]]^{M,t,h} = 1$ gdw. $< [[t_1]]^{M,t,h}, \ldots , [[t_n]]^{M,t,h} > \in [[R^n]]^{M,t,h}$

$[[s = t]]^{M,t,h} = 1$ gdw. $[[s]]^{M,t,h} = [[t]]^{M,t,h}$

(3) komplexe Formeln:

$[\![\neg A]\!]^{M,t,h} = 1$ **gdw.** $[\![A]\!]^{M,t,h} = 0$

$[\![A \wedge B]\!]^{M,t,h} = 1$ **gdw.** $[\![A]\!]^{M,t,h} = 1$ **und** $[\![B]\!]^{M,t,h} = 1$

$[\![A \vee B]\!]^{M,t,h} = 1$ **gdw.** $[\![A]\!]^{M,t,h} = 1$ **oder** $[\![B]\!]^{M,t,h} = 1$

$[\![A \rightarrow B]\!]^{M,t,h} = 1$ **gdw.** $[\![A]\!]^{M,t,h} = 0$ **oder** $[\![B]\!]^{M,t,h} = 1$

$[\![A \leftrightarrow B]\!]^{M,t,h} = 1$ **gdw.** $[\![A]\!]^{M,t,h} = [\![B]\!]^{M,t,h}$

$[\![\forall xA]\!]^{M,t,h} = 1$ **gdw.** $[\![A]\!]^{M,t,h_x^a} = 1$ **für alle** $a \in U$

$[\![\exists xA]\!]^{M,t,h} = 1$ **gdw.** $[\![A]\!]^{M,t,h_x^a} = 1$ **für mind. ein** $a \in U$

$[\![FA]\!]^{M,t,h} = 1$ **gdw.** $[\![A]\!]^{M,t',h} = 1$ **für mind. ein** $t' > t$

$[\![PA]\!]^{M,t,h} = 1$ **gdw.** $[\![A]\!]^{M,t',h} = 1$ **für mind. ein** $t' < t$

$[\![GA]\!]^{M,t,h} = 1$ **gdw.** $[\![A]\!]^{M,t',h} = 1$ **für alle** $t' > t$

$[\![HA]\!]^{M,t,h} = 1$ **gdw.** $[\![A]\!]^{M,t',h} = 1$ **für alle** $t' < t$

Eine Lösung für das Substitutionsproblem

Der Bundeskanzler hat immer die Richtlinienkompetenz.

$\Rightarrow$ **I** RK(dbk)

immer A repräsentiert durch **I**A := A & **H**A & **G**A

Der Bundeskanzler ist Helmut Kohl.

$\Rightarrow$ dbk = hk

Identität drückt aus, daß die Konstanten dbk und hk <u>extensional</u> identisch sind (relativ zum Bewertungszeitpunkt t); sie können <u>intensional</u> verschieden sein:

$[\![\text{dbk}]\!]^{M,t} = [\![\text{hk}]\!]^{M,t}$, nicht: $[\![\text{dbk}]\!]^{M} = [\![\text{hk}]\!]^{M}$

Die Verfeinerung des Denotatbegriffs verhindert die Anwendung der Substitutionsregel bei <u>extensionsgleichen Ausdrücken</u> in <u>intensionalen Kontexten</u>.

Es gilt nicht: **I** RK(dbk), dbk = hk $\models$ **I** RK(hk),

wohl aber: RK(dbk), dbk = hk $\models$ RK(hk)

und: **I** RK(dbk), **I**(dbk = hk) $\models$ **I** RK(hk)

Varianten der Temporallogik

Die temporallogische Semantik läßt alternative Modellbegriffe zu:

- < ist lineare Ordnung: Standard
- < ist vorwärtsverzweigende Halbordnung: plausible schwächere Alternative
- < ist Halbordnung (vorwärts- und rückwärts-verzweigend): noch schwächere Alternative

Plausible Verschärfungen des zeitlogischen Modellbegriffs:

- < ist dicht
- < ist beidseitig offen (hat kein erstes und kein letztes Element)

Modallogik

Modalitäten

2+2 ist notwendigerweise gleich 4

Es ist möglich, daß es regnet

Es ist möglich, daß es nicht regnet

Es ist nicht möglich, daß es (gleichzeitig) regnet und nicht regnet

Man kann nicht gleichzeitig an zwei Stellen sein

Man kann den Kuchen nicht essen und doch behalten

Du kannst die Partie nicht gewinnen

Wenn Du den Turm nach d4 statt nach d3 gezogen hättest, hättest Du gewonnen

Ich muß den Zug erreichen

Du kannst den Zug erreichen

Peter kann den Zug erreicht haben

Peter muß den Zug verpaßt haben

Jeder muß (soll) pünktlich erscheinen

Man kann (darf) bei Rot rechts abbiegen

Modalitäten können unterschiedlichen Charakter haben, z.B.:

- logisch, naturgesetzlich, faktisch, epistemisch, deontisch

Sprache der modalen Prädikatenlogik L_{PM}:

<u>Alphabet von L_{PM}:</u>

wie das Alphabet von L_P;

zusätzliche logische Konstanten:

$\Diamond$: möglicherweise; es kann der Fall sein, daß

$\Box$: notwendigerweise; es muß der Fall sein, daß

<u>Formel von L_{PM}:</u>

wie Formel von L_P;

zusätzliche Klausel:

Wenn A Formel von L_{PM}, so auch

$\Diamond A$, $\Box A$

Modallogische Modellstruktur

Eine Modellstruktur für L_{PM} ist ein geordnetes Tripel

$M = \langle U, W, V \rangle$ mit:

(1) $U \neq \emptyset$ (Individuenbereich)

(2) $W \neq \emptyset$ (Menge möglicher Welten)

(3) $W \cap U = \emptyset$

(4) V eine Abbildung mit:

(i) $V(a) : W \to U$ für $a \in IK$

(ii) $V(p) : W \to \{0, 1\}$ $p \in RK_0$

(iii) $V(R^n) : W \to P(U^n)$ für $R^n \in RK_n$

Interpretation für L_{PM}

Sei M = < U, W, V > Modellstruktur für L_{PM}, $w \in W$, h Belegungsfunktion.

Es gelten die Interpretationsregeln von L_P, mit einer möglichen Welt w als zusätzlichem Parameter (analog zum Zeitparameter in L_{PT}), ausserdem

$[\![\Diamond A]\!]^{M,w,h} = 1$ gdw. $[\![A]\!]^{M,w',h} = 1$ für mind. ein $w' \in W$

$[\![\Box A]\!]^{M,w,h} = 1$ gdw. $[\![A]\!]^{M,w',h} = 1$ für alle $w' \in W$

In L_{PM} gültig:

(1) $\models \Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B)$

(2) Wenn $\models A$, so $\models \Box A$

(3) $\models \Diamond A \leftrightarrow \neg\Box\neg A$

(4) $\models \Box A \leftrightarrow \neg\Diamond\neg A$

(5) $\models \Box A \rightarrow A$

(6) $\models A \rightarrow \Diamond A$

(7) $\models \Box A \rightarrow \Box\Box A$

(8) $\models \Diamond\Diamond A \rightarrow \Diamond A$

(9) $\models A \rightarrow \Box\Diamond A$

(10) $\models \Diamond A \rightarrow \Box\Diamond A$

Modale Prädikatenlogik mit Zugänglichkeitsrelation

Modellstruktur:

M = < U, W, R, V > mit

(1) $U, W \neq \emptyset$

(2) $W \cap U = \emptyset$

(3) $R \subseteq W \times W$

(4) V eine Abbildung mit:

(i) $V(a) : W \rightarrow U$ für $a \in IK$

(ii) $V(p) : W \rightarrow \{0, 1\}$ $p \in RK_0$

(iii) $V(R^n) : W \rightarrow P(U^n)$ für $R^n \in RK_n$

Interpretation der Modaloperatoren:

$[\![\Diamond A]\!]^{M,w,h} = 1$ gdw. $[\![A]\!]^{M,w',h} = 1$ für mind. ein $w' \in W$ mit wRw'

$[\![\Box A]\!]^{M,w,h} = 1$ gdw. $[\![A]\!]^{M,w',h} = 1$ für alle $w' \in W$ mit wRw'

Varianten der modalen Prädikatenlogik

- M1 - M4 gelten generell, für beliebige Zugänglichkeits-relation R
- M5 und M6 gelten, wenn R reflexiv ist (System "T")
- M7 und M8, wenn R transitiv ist (System "S4")
- M9 und M10, wenn R zusätzlich symmetrisch ist, also Äquivalenzrelation (System "S5"; äquivalent mit L_{PM})

Sprache der modal und temporal erweiterten Prädikatenlogik L_{PMT}

<u>Alphabet von L_{PMT}</u>:

wie das Alphabet von L_P;

zusätzliche logische Konstanten:

◇ :	möglicherweise; es kann der Fall sein, daß
□ :	notwendigerweise; es muß der Fall sein, daß
F:	es wird (einmal) der Fall sein, daß
P:	es war (einmal) der Fall, daß
G:	es wird immer der Fall sein, daß
H:	es war immer der Fall, daß

<u>Formel von L_{PMT}</u>:

wie Formel von L_P;

zusätzliche Klausel:

Wenn A Formel von L_{PMT}, so auch

◇ A, □A, **F**A, **P**A, **G**A, **H**A

Modellstruktur für L_{PMT}

Eine Modellstruktur für L_{PMT} ist ein geordnetes Quintupel M = < U , W , T , < , V > mit:

(1) U, W, T $\neq$ Ø

(2) U, W, T paarweise disjunkt

(3) < lineare Ordnung auf T

(4) V eine Abbildung mit:

(i) $V(a): W \times T \rightarrow U$ für $a \in IK$

(ii) $V(p): W \times T \rightarrow \{0, 1\}$ $p \in RK_0$

(iii) $V(R^n): W \times T \rightarrow P(U^n)$ für $R^n \in RK_n$

Interpretation für L_{PMT}

Sei M = < U, W, T, < , V > Modellstruktur für L_{PMT}, h Belegungsfunktion:

(1) Konstanten und Variablen:

$[\![x]\!]^{M,w,t,h} = h(x)$ für $x \in IV$

$[\![a]\!]^{M,w,t,h} = V(a)(<w,t>)$ für $a \in IK$

$[\![R^n]\!]^{M,w,t,h} = V(R^n)(<w,t>)$ für $R^n \in RK_n$

(2) atomare Formeln:

$[\![R^n\ t_1 \dots t_n]\!]^{M,w,t,h} = 1$ gdw.

$< [\![t_1]\!]^{M,w,t,h}, \dots, [\![t_n]\!]^{M,w,t,h} > \in [\![R^n]\!]^{M,w,t,h}$

$[\![s = t]\!]^{M,w,t,h} = 1$ gdw. $[\![s]\!]^{M,w,t,h} = [\![t]\!]^{M,w,t,h}$

(3) komplexe Formeln:

$[\![\neg A]\!]^{Mwt,h}$, $[\![A \wedge B]\!]^{M,w,t,h}$ etc. wie in L_p

$[\![\forall x A]\!]^{M,w,t,h}$, $[\![\exists x A]\!]^{M,w,t,h}$ wie in L_p

$[\![FA]\!]^{M,w,t,h} = 1$ gdw. $[\![A]\!]^{M,w,t',h} = 1$ für mind. ein $t' > t$

$[\![PA]\!]^{M,w,t,h} = 1$ gdw. $[\![A]\!]^{M,w,t',h} = 1$ für mind. ein $t' < t$

$[\![GA]\!]^{M,w,t,h} = 1$ gdw. $[\![A]\!]^{M,w,t',h} = 1$ für alle $t' > t$

$[\![HA]\!]^{M,w,t,h} = 1$ gdw. $[\![A]\!]^{M,w,t',h} = 1$ für alle $t' < t$

$[\![\Box A]\!]^{M,w,t,h} = 1$ gdw. $[\![A]\!]^{M,w',t',h} = 1$ für alle $w' \in W$, $t' \in T$

$[\![\Diamond A]\!]^{M,w,t,h} = 1$ gdw. $[\![A]\!]^{M,w',t',h} = 1$ für mind. ein $w' \in W$, $t' \in T$

Typentheorie

Prädikatenlogik als Repräsentationssprache?

Problem 1:

Der Interpretationsbegriff von FOL ist zu einfach (Lösung: Intensionalisierung der Modellstruktur)

Problem 2:

Die syntaktische Struktur von FOL ist zu wenig differenziert

Problem 3:

Semantikkonstruktion: FOL ist kompositionell, erlaubt aber nicht die kompositionelle Analyse natürlich-sprachlicher Sätze

Beispiel:

Jeder Mensch hat einen Fehler

$$\forall x\left(\mathrm{Mensch}(x) \rightarrow \exists y\left(\mathrm{Fehler}(y) \wedge \mathrm{hat}(x,y)\right)\right)$$

Satzoperatoren

Gestern hat es geregnet.

Lösung 1: Neue logische Konstanten einführen

Gestern hat es geregnet. $\Rightarrow$ Y p

morgen, übermorgen, ...

am Montag, im Mittelalter, ...

manchmal, oft, selten, ...

Lösung 2: Neuer Typ von nicht-logischen Konstanten:

Alphabet erweitert um:

Satzoperatoren $O_1, O_2, O_3, ...$

Syntax:

Wenn O Satzoperator und A Formel, so ist auch OA Formel.

Prädikatenprädikate

Peter ist intelligent

Intelligenz ist eine nützliche Eigenschaft

____

Peter hat eine nützliche Eigenschaft

Peter hat nur nützliche Eigenschaften

Peter ist intelligent

____

Intelligenz ist eine nützliche Eigenschaft

Problem: Quantifikation über Eigenschaften

Lösung: Prädikatenlogik 2. Stufe

Prädikatenlogik 2. Stufe

Alphabet:

Prädikate 2. Stufe: $\mathbb{F}, \mathbb{G}, \mathbb{N}, \ldots$

Relationsvariablen: $F, G, ..., P, Q, R, ...$

Analyse der Beispiele:

F(a)	$\forall F(F(a) \rightarrow \mathbb{N}(F))$
$\underline{\mathbb{N}(F)}$	$\underline{F(a)}$
$\exists F(\mathbb{N}(F) \wedge F(a))$	$\mathbb{N}(F)$

Weitere nicht-prädikative Ausdrücke:

- **Attributive Adjektive**

  Peter ist ein promovierter Logiker

  Peter ist ein leidenschaftlicher Logiker

- **Ereignismodifikatoren**

  Französische Wagen fahren schnell

  Französische Wagen rosten schnell

- **Gradmodifikatoren**

  Französische Wagen rosten ziemlich schnell

  Peter ist ein sehr guter Logiker

Typen

- Elementare Typen:

  e - Term / Objekt (*entity*)

  t - Formel / Wahrheitswert (*truth value*)

- Komplexe Typen:

  Wenn σ, τ Typen sind, ist auch $< \sigma, \tau >$ ein Typ.

Beispiele:

Prädikatkonstante:	$<e, t>$
Satzoperator:	$<t, t>$
Adjektiv:	$<<e, t>, <e, t>>$
Gradmodifikator:	$<<<e, t>,<e, t>>,<<e, t>,<e, t>>>$

Alphabet von L_{Typ}

(1) Logische Symbole:

(i) $\neg , \wedge , \vee , \rightarrow , \leftrightarrow$

(ii) $\forall, \exists$

(iii) $=$

(2) Variablen:

Für jeden Typ τ eine Menge von Variablen

$Var_\tau = \{ \mathbf{v}_1^\tau, \mathbf{v}_2^\tau, ...\}$

(3) Nicht-logische Konstanten:

Für jeden Typ τ eine (möglicherweise leere) Menge von Konstanten $Con_\tau = \{\mathbf{a}_1^\tau, \mathbf{a}_2^\tau, ...\}$

<u>Beispiel</u>:

schnell $\Rightarrow$ $\mathbf{a}_1^{<<e,t>,<e,t>>}$

Die L_{Typ}-Entsprechung des natürlichsprachlichen Ausdrucks α wird kurz mit α' notiert, also:

schnell $\Rightarrow$ *schnell'*

Syntax von L_{Typ}

Für jeden Typ τ ist die Menge der wohlgeformten Ausdrücke vom Typ τ, ME_τ , (ME für "meaningful expression") durch folgende Bedingungen festgelegt:

(1) Für jeden Typ τ : $Con_\tau \cup Var_\tau \subseteq ME_\tau$

(2) Wenn $\alpha \in ME_{<\sigma,\tau>}$ und $\beta \in ME_\sigma$, dann $\alpha(\beta) \in ME_\tau$

(3) Wenn $\alpha, \beta \in ME_\tau$, dann $\alpha = \beta \in ME_t$

(4) Wenn A, B $\in ME_t$, dann $\neg$ A, $(A \vee B)$, $(A \leftrightarrow B)$, $(A \rightarrow B)$, $(A \wedge B) \in ME_t$

(5) Wenn $A \in ME_t$ und v Variable eines bel. Typs, dann $\forall v$ A und $\exists v$ A $\in ME_t$

Anmerkungen zur Syntax von L_{Typ}

Zu (2):

Die Operation heißt <u>Funktionale Applikation</u>. Sie erlaubt die Bildung von Funktor-Argument-Strukturen auf beliebiger Ebene.

Zu (3):

Gleichheit kann zwischen Ausdrücken beliebigen (aber identischen) Typs ausgedrückt werden.

Beispiel: $\alpha = \beta$ drückt für $\alpha, \beta \in ME_t$ Äquivalenz aus.

Zu (5):

Quantifiziert werden kann über Variablen beliebigen Typs.

Beispiel:

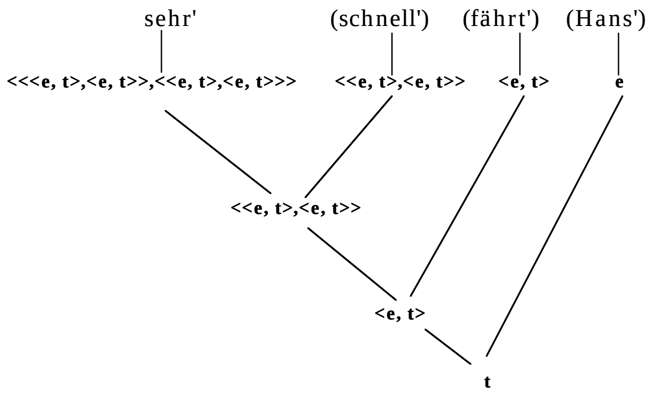
"Peter hat nur nützliche Eigenschaften"

$\forall$ F (F (Peter') $\rightarrow$ nützlich' (F))

Beispiel 1

Hans fährt sehr schnell.

sehr' (schnell') (fährt') (Hans')



Beispiel 2

Hans arbeitet in Hamburg

Hans'	$\in$	Con $_e$
Hamburg'	$\in$	Con $_e$
arbeitet'	$\in$	Con $_{<e,t>}$
in'	$\in$	Con $_{<e,<t,t>>}$

in' (Hamburg') (arbeitet' (Hans'))

<e,<t,t>> e <e,t> e

<t,t> t

t

Denotate für typtheoretische Ausdrücke

Typ:	Mögliche Denotate:
e	Individuen ($\in$ U)
t	Wahrheitswerte ($\in \{0,1\}$)
<e,t>	Abbildungen von Individuen in Wahrheitswerte ($\in \{0,1\}^U$) bzw. Mengen von Individuen ($\in P(U)$)
<<e,t>,<e,t>>	Abbildungen von Prädikatsdenotaten in Prädikatsdenotate

Modellstruktur für die Typtheorie

Eine Modellstruktur für die Sprache der Typtheorie (L_{Typ}) ist ein Tripel

$$M = \langle U , D , V \rangle, \text{ wobei}$$

(1) $U \neq \emptyset$ (Individuenbereich)

(2) D eine Familie von möglichen Denotaten für jeden Typ τ derart, daß

$$D_t = \{0, 1\}$$

$$D_e = U$$

$$D_{<\sigma,\tau>} = D\tau^{D\sigma}$$

(3) V eine Abbildung, die jeder Konstante vom Typ τ ein Element aus D_τ zuordnet

Im Lexikon natürlicher Sprachen realisierte Typen

Offene Klassen:

• Eigennamen	e
• (Standard-)Prädikate	<e,t>
• n-stellige (Standard-)Relationen (n ≤ ?)	<e,<e,t>> / <e,<e,<e,t>>>
• Satzoperatoren	<t,t>
• Prädikatsmodifikatoren	<<e,t>,<e,t>>

Geschlossene Klassen (Beispiele):

- Gradmodifikatoren <<<e,t>,<e,t>>,<<e,t>,<e,t>>>
- Determinatoren <<e,t>,<<e,t>,t>>
- Präpositionen <e,<t,t>> / <e,<<e,t>,<e,t>>>

Zur Terminologie:

- Ausdrücke vom Typ $<\sigma, t>$ für beliebige Typen σ heißen Prädikate (i.w.S.)
- Ausdrücke vom Typ $<\tau, \tau>$ für beliebige Typen τ heißen Modifikatoren

Typtheoretische Interpretation: Funktionale Applikation

Syntax:

schnell' fährt' Peter'

$\in ME_{<<e,t>,<e,t>>}$ $\in ME_{<e,t>}$ $\in ME_e$

schnell' (fährt')

$\in ME_{<e,t>}$

schnell'(fährt')(Peter')

$\in ME_t$

Interpretation:

V(schnell') V(fährt') V(Peter')

$\in D_{<<e,t>,<e,t>>}$ $\in D_{<e,t>}$ $\in D_e$

V(schnell')(V(fährt'))

$\in D_{<e,t>}$

V(schnell')(V(fährt'))(V(Peter'))

$\in D_t$

Interpretation für L_{TYP}

Eine Belegung für L_{TYP} ist eine Abbildung h, die für jeden Typ τ jedem $v \in Var_\tau$ einen Wert aus D_τ zuordnet.

Sei M = < U, D, V> eine Modellstruktur für L_{TYP}, h eine Belegung. Der semantische Wert $[\![\alpha]\!]^{M,h}$ für beliebige Ausdrücke α von L_{TYP} ist gegeben durch:

(1) (i) $[\![\alpha]\!]^{M,h} = V(\alpha)$, falls α Konstante

(ii) $[\![\alpha]\!]^{M,h} = h(\alpha)$, falls α Variable

(2) $[\![\alpha(\beta)]\!]^{M,h} = [\![\alpha]\!]^{M,h}([\![\beta]\!]^{M,h})$

(3) $[\![\alpha = \beta]\!]^{M,h} = 1$ gdw. $[\![\alpha]\!]^{M,h} = [\![\beta]\!]^{M,h}$

(4) $[\![\neg A]\!]^{M,h}$, $[\![A \vee B]\!]^{M,h}$ etc. wie in L_P

(5) (i) $[\![\forall v A]\!]^{M,h} = 1$ gdw. $[\![A]\!]^{M,h^{\delta}_{v}} = 1$ für alle $\delta \in D_\tau$ (τ Typ von v)

(ii) $[\![\exists v A]\!]^{M,h} = 1$ gdw. $[\![A]\!]^{M,h^{\delta}_{v}} = 1$ für mind. ein $\delta \in D_\tau$ (τ Typ von v)

Die Semantik von Nominalausdrücken

Probleme der FOL-Analyse:

- Die Semantik eines Nominalausdrucks wird über die Satzrepräsentation "verteilt".

  Jeder Mensch hat einen Fehler

  $\forall x\,(Mensch(x) \rightarrow \exists y\,(Fehler(y) \wedge hat\,(x,y)))$

- Unterschiedliche Nominalausdrücke führen zu strukturell ganz unterschiedlichen Repräsentationen:

Peter arbeitet	$\Rightarrow$	Fa
Jemand arbeitet	$\Rightarrow$	$\exists x Fx$
Jeder Student arbeitet	$\Rightarrow$	$\forall x(Fx \rightarrow Gx)$
Kein Student arbeitet	$\Rightarrow$	$\neg\exists x(Fx \& Gx)$
Hans und Peter arbeiten	$\Rightarrow$	Fa & Fb

NP-Semantik in der Typtheorie

Bruno arbeitet ⇒ arbeiten' (Bruno')
<e,t> e

t

Jeder Student arbeitet ⇒ arbeiten' (jeder-student')

<e,t> e

t

Jeder Student arbeitet ⇒ jeder-student' (arbeiten')

<<e,t>,t> <e,t>

t

<u>Typtheoretische Lösung</u>:

Umkehrung der Funktor-Argument-Beziehung im Satz; "Hochtypen" der NP zum Prädikatenprädikat

1. **Beispiel:** ***Hamburg ist ein grosser Stadtstaat***

2. **Adjektivklassen**

3. **NP-Semantik in der Typentheorie**

4. **Eigennamen (Typanhebung)**

5. **Theorie der Generalisierten Quantoren**

Typentheorie und λ-Abstraktion

λ-Abstraktion: Motivation

Komplexe Prädikate als Argumente:

Schwimmen ist gesund

Nicht rauchen ist gesund

Es ist gefährlich, Alkohol zu trinken und Auto zu fahren

Koordinationsprobleme:

Peter arbeitet und Maria liest ein Buch

Peter arbeitet und liest ein Buch

Peter liest ein Buch und drei Aufsätze

Peter arbeitet schnell und gründlich

Hans kennt und Peter liebt Maria

Kompositionsprobleme für transitive Verben:

Jeder Mensch	*hat*	*einen Fehler*
$\langle\langle e,t\rangle,t\rangle$	$\langle e, \langle e,t\rangle\rangle$	$\langle\langle e,t\rangle,t\rangle$

λ–Abstraktion: Das Prinzip

Komplexe Prädikats-/Funktionsbezeichnungen:

LISP-Definition für "*natürliche Zahl*":

```
(LAMBDA (X) (AND (INTEGER X) (GT X 0) ) )
```

Logische Notation für "*natürliche Zahl*":

λ x (integer(x) $\wedge$ x > 0)

arbeiten und ein Buch lesen:

λ x (arbeitet' (x) $\wedge$ liest' (ein-Buch') (x)) (Peter')

Funktionale Applikation:

3 ist eine natürliche Zahl

λ x (integer (x) $\wedge$ x > 0) (3)

Peter arbeitet und liest ein Buch

λ x (arbeitet' (x) & liest' (ein-Buch') (x)) (Peter')

Sprache der erweiterten Typtheorie

Alphabet von L_λ:

wie L_{Typ}, zusätzlich λ als logische Konstante

Syntax von L_λ:

wie für L_{Typ}, zusätzliche Klausel für "λ-Ausdrücke":

Wenn $v \in Var_\sigma$, $\alpha \in ME_\tau$, dann $\lambda v\alpha \in ME_{\langle\sigma,\tau\rangle}$.

Bemerkung:

Da λv sich mit Ausdrücken beliebigen Typs verbinden kann, muß der Skopus immer durch Klammerung eindeutig gemacht werden. Wir verwenden im allgemeinen eckige Klammern. Wenn keine Klammern stehen, nimmt der Operator engstmöglichen Skopus.

Beispiel:

$\lambda x\, [R(x)(y)]$

$\lambda x\, R(x)(y) = \lambda x\, [R]\, (x)(y) \cong R(y)$

Beispiele für Formalisierungen

Hans ist Professor und kennt Maria.

λ x (Professor' (x) $\wedge$ kennt' (Maria') (x)) (Hans')

e **<e,t>** **e** **<e,<e,t>>** **e** **e** **e**

t **<e,t>**

t

t

<e,t>

t

Hans kennt und Peter liebt Maria.

λx (kennt' (x) (Hans') $\wedge$ liebt' (x) (Peter')) (Maria')

e <e,<e,t>> e e <e,<e,t>> e e e

<e,t> <e,t>

t t

t

<e,t>

t

$$\varphi \quad : \quad \begin{bmatrix} \mathbf{a} \to 0 \\ \mathbf{b} \to 1 \\ \mathbf{c} \to 0 \\ \mathbf{d} \to 1 \\ \mathbf{e} \to 0 \end{bmatrix}$$

kennt:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a} \to \begin{bmatrix} \mathbf{a} \to 1 \\ \mathbf{b} \to 0 \\ \mathbf{c} \to 1 \\ \mathbf{d} \to 1 \\ \mathbf{e} \to 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{b} \to \begin{bmatrix} \mathbf{a} \to 1 \\ \mathbf{b} \to 1 \\ \mathbf{c} \to 0 \\ \mathbf{d} \to 1 \\ \mathbf{e} \to 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{c} \to \begin{bmatrix} \mathbf{a} \to 0 \\ \mathbf{b} \to 0 \\ \mathbf{c} \to 1 \\ \mathbf{d} \to 1 \\ \mathbf{e} \to 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{d} \to \begin{bmatrix} \mathbf{a} \to 1 \\ \mathbf{b} \to 1 \\ \mathbf{c} \to 0 \\ \mathbf{d} \to 1 \\ \mathbf{e} \to 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{e} \to \begin{bmatrix} \mathbf{a} \to 1 \\ \mathbf{b} \to 0 \\ \mathbf{c} \to 1 \\ \mathbf{d} \to 1 \\ \mathbf{e} \to 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Semantik von L_λ

<u>Modellstruktur von L_λ:</u>

identisch mit der Modellstruktur von L_{Typ}

<u>Interpretation für L_λ:</u>

wie Interpretation für L_{Typ}, zusätzliche Klausel für λ-Ausdrücke:

Sei $v \in Var_\sigma$, $\alpha \in ME_\tau$

$[\![\lambda v\ \alpha]\!]^{M,h}$ ist diejenige Abbildung $\phi : D_\sigma \to D_\tau$

so dass gilt: $\phi(\delta) = [\![\alpha]\!]^{M,h}$ für jedes $\delta \in D_\sigma$

Interpretation von λ-Ausdrücken: Beispiel

"jemand zu sein, den Bruno kennt",

"von Bruno gekannt werden" (Passivkonstruktion!)

$[\![\lambda x [\text{kennt}' (x) (b^*)]]\!]^{M,h}$ ist diejenige Abbildung

$\varphi : U \to \{ 0 , 1 \}$ so dass

$$\varphi (a) = [\![\text{kennt}'(x)(b^*)]\!]^{M,\, h^{a}_{x}}$$

$= V(\text{kennt}') (a) (V(b^*))$, für alle $a \in D_e$

Beispiel

Hans ist Professor und kennt Maria

$[\![\lambda x[\text{Prof}' (x) \wedge \text{kennt}' (\text{Maria}') (x)] (\text{Hans}')]\!]^{M,h}$

$= [\![\lambda x[\text{Prof}' (x) \wedge \text{kennt}' (\text{Maria}') (x)]]\!]^{M,h} ([\![\text{Hans}']\!]^{M,h})$

$\varphi: U \to \{ 0, 1 \}$ derart, daß V(Hans')

$$\varphi(\alpha) = \left[\!\!\left[\text{Prof}'(x) \wedge \text{kennt}'(\text{Maria}')(x) \right]\!\!\right]^{M,h^{\alpha}_{x}}$$

$$[\![Prof'(x) \wedge kennt'(Maria')(x)]\!]^{M, h_x^{V(Hans')}} = 1$$

gdw. $V(Prof')(h_x^{V(Hans')}(x)) = 1$ und

$$[\![kennt']\!]^{M,h_x^{V(Hans')}} ([\![Maria']\!]^{M,h_x^{V(Hans')}})(h_x^{V(Hans')}(x)) = 1$$

gdw. $V(Prof')(V(Hans')) = 1$ und

$V(kennt')(V(Maria'))(V(Hans')) = 1$

λ-Konversion

<u>Applikation von λ-Ausdrücken, Interpretation:</u>

$[\![\lambda x[Prof'(x) \wedge kennt'(Maria')(x)](Hans')]\!]^{M,h} =$

$$[\![Prof'(x) \wedge kennt'(Maria')(x)]\!]^{M,h_x^{V(Hans')}}$$

$\lambda x[Prof'(x) \wedge kennt'(Maria')(x)](Hans')$

<u>Generelles Schema für die Interpretation:</u>

$[\![\lambda v\alpha(\beta)]\!]^{M,h} = [\![\alpha]\!]^{M,h^{[\![\beta]\!]}}$

<u>Gleicher Effekt durch Substitution:</u>

$\lambda v\alpha(\beta) \Leftrightarrow \alpha^{\beta/v}$

Beispiel:

$\lambda x[Prof'(x) \wedge kennt'(Maria')(x)](Hans')$

$\Leftrightarrow$ $[Prof'(x) \wedge kennt'(Maria')(x)]^{Hans'/x}$

$=$ $Prof'(Hans') \wedge kennt'(Maria')(Hans')$

λ-Konversion: Eine Einschränkung

<u>Problem:</u>

$\lambda x[\exists y\ kennt'(y)(x)](y)$

und

$\exists y\ kennt'(y)(y)$ (= $[\exists y\ kennt'(y)(x)]^{y/x}$)

sind nicht äquivalent.

Konversion muß eingeschränkt werden.

<u>Idee:</u>

Freie Variablen dürfen nicht durch Konversion in den Skopus eines Operators eingeführt werden, der sie bindet.

<u>Definition:</u>

Seien v und v' Variablen desselben Typs, β wohlgeformter Ausdruck.

v' ist *frei für* v in β gdw.

kein freies Vorkommen von v in β sich im Skopus eines Quantors (∀, ∃) oder λ-Operators befindet, der v' bindet.

λ-Kalkül: Konversionsregeln

<u>α-Konversion:</u>

$\lambda v\alpha \Leftrightarrow \lambda v'[\alpha^{v'/v}]$,

wenn v' nicht in α vorkommt.

<u>β-Konversion:</u>

$\lambda v\alpha(\beta) \Leftrightarrow \alpha^{\beta/v}$,

wenn jede in β vorkommende freie Variable v' frei für v in α ist

<u>η-Konversion:</u>

$\lambda v[\alpha(v)] \Leftrightarrow \alpha$

Die ⇒ - Richtung der β-Konversionsregel heißt "β-Reduktion".

Quantorenterme als λ-Ausdrücke

jeder Student	*arbeitet*
$<<e,t>,t>$	$<e,t>$
$\Downarrow$	$\Downarrow$

$\lambda G\ [\forall x\ (\text{student}'(x) \rightarrow G(x)]\ \ (\text{arbeitet}')$

$\Rightarrow\quad \forall x\ (\text{student}'(x) \rightarrow \text{arbeitet}'(x))$ [β-Reduktion]

jeder	*Student*	*arbeitet*
$<<e,t>,<<e,t>,t>>$	$<e,t>$	$<e,t>$
$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$

$\lambda F\ [\lambda G\ [\forall x\ (F(x) \rightarrow G(x))]]\ \ (\text{student}')\ \ (\text{arbeitet}')$

$\Rightarrow\quad \lambda G[\forall x\ (\text{student}'(x) \rightarrow G(x)]\ (\text{arbeitet}')$ [β-Reduktion]

$\Rightarrow\quad \forall x\ (\text{student}'(x) \rightarrow \text{arbeitet}'(x))$ [β-Reduktion]

Quantorenterme als λ–Ausdrücke: Beispiele

jeder'	$\lambda F\ [\lambda G\ [\forall x\ (F(x) \rightarrow G(x))]]$
ein'	$\lambda F\ [\lambda G\ [\exists x\ (F(x) \wedge G(x))]]$
kein'	$\lambda F\ [\lambda G\ [\forall x\ (F(x) \rightarrow \neg G(x))]]$
jemand'	$\lambda F\ [\exists x\ (F(x))]$
Peter'	$\lambda F\ [F(p^*)]$
Hans-und-Peter'	$\lambda F\ [F(h^*) \wedge F(p^*)]$

λ–Konversion: Ein Beispiel

Jeder Student hat ein Problem

$\lambda P[\ \lambda Q[\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))]]\ (\text{Student}')\ (\lambda z[\lambda R[\lambda S[\exists y(R(y) \wedge S(y))]](\text{Problem}')\ (\lambda u[\text{hat}'(z,u)])])$

$\forall x(\text{Student}'(x) \rightarrow (\lambda z[\lambda R[\lambda S[\exists y(R(y) \wedge S(y))]](\text{Problem}')\ (\lambda u[\text{hat}'(z,u)])](x))$

$\forall x(\text{Student}'(x) \rightarrow \lambda R[\lambda S[\exists y(R(y) \wedge S(y))]]\ (\text{Problem}')\ (\lambda u\ [\text{hat}'(x,u)]))$

$\forall x(\text{Student}'(x) \rightarrow \exists y(\text{Problem}'(y) \wedge \lambda u\ [\text{hat}'(x,u)](y)))$

$\forall x(\text{Student}'(x) \rightarrow \exists y\ (\text{Problem}'(y) \wedge \text{hat}'(x,y)))$

λ-Konversion und Unifikation

$\lambda x\ [\text{arbeitet}'(x)]$

Erste Version:

$$\begin{bmatrix} \text{LAMBDA:} & \boxed{1} \\ \text{BODY:} & \begin{bmatrix} \text{PRED:} & \text{'arbeitet'} \\ \text{ARG:} & \boxed{1} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

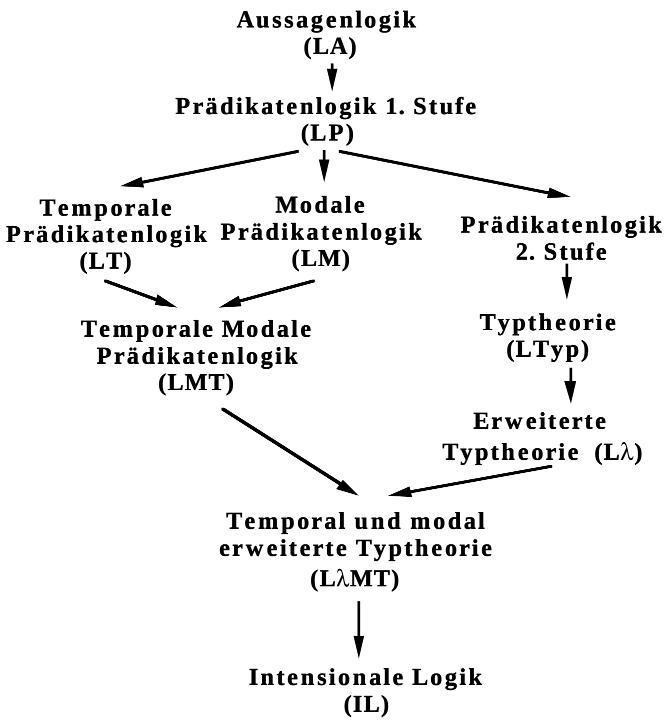
Zweite Version:

$$\begin{bmatrix} \text{LAMBDA:} & \begin{bmatrix} \text{FIRST:} & \boxed{1} \\ \text{REST:} & \varepsilon \end{bmatrix} \\ \text{BODY:} & \begin{bmatrix} \text{PRED:} & \text{'arbeitet'} \\ \text{ARG:} & \boxed{1} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Andere Notation:

$$\begin{bmatrix} \text{LAMBDA:} & \langle \boxed{1} \rangle \\ \text{BODY:} & \begin{bmatrix} \text{PRED:} & \text{'arbeitet'} \\ \text{ARG:} & \boxed{1} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Logiksprachen für die Bedeutungsrepräsentation



DE DICTO- / DE RE - LESARTEN

Jeder Mitreisende kann (der) Täter sein.

Ein Student hat immer gearbeitet.

Der Bundeskanzler hatte schon immer die Richtlinienkompetenz.

Der Bundeskanzler hatte schon immer Übergewicht.

De-Re- und De -Dicto-Lesarten
(Modale u. Temporale Präd.logik)

Jeder Mitreisende kann (der) Täter sein

$\forall$ x (Mitreisender' (x) $\rightarrow \Diamond$ Täter' (x))

$\Diamond$ $\forall$ x (Mitreisender' (x) $\rightarrow$ Täter' (x))

Ein Student hat immer gearbeitet

$\exists$ x (Student' (x) $\wedge$ H arbeitet' (x))

H $\exists$ x (Student' (x) $\wedge$ arbeitet' (x))

Der Bundeskanzler hatte schon immer die Richtlinienkompetenz

H Richtlinienkompetenz' (DBK')

Der Bundeskanzler hatte schon immer Übergewicht

???

De-Re- und De -Dicto-Lesarten: $L_{\lambda MT}$-Analyse

Jeder Mitreisende kann (der) Täter sein

λP[$\forall$ x (Mitreisender' (x) $\rightarrow$ P(x))](λy[$\Diamond$ Täter' (y)])

$\Diamond$ λP[$\forall$ x (Mitreisender' (x) $\rightarrow$ P(x))] (Täter')

Ein Student hat immer gearbeitet

λP[$\exists$ x (Student' (x) $\wedge$ P(x))](λy[H arbeitet'(y)])

H λP[$\exists$ x (Student' (x) $\wedge$ P(x))] (arbeitet')

Der Bundeskanzler hatte schon immer die Richtlinienkompetenz

H Richtlinienkompetenz' (DBK')

Der Bundeskanzler hatte schon immer Übergewicht

λx[H übergewichtig'(x)] (DBK')

Intensionale Ausdrücke

Peter *glaubt*, dass es regnet.

Peter *behauptet*, dass es regnet.

Der Präsident schläft.

Der Präsident *wechselt*.

Peter kauft ein Buch über Semantik.

Peter *sucht* ein Buch über Semantik.

Intensionen und Extensionen

	Intension	Extension
Satz	Proposition	Wahrheitswert
Individuen-konstant	Individuen-konzept	Individuum
Prädikatkon-stante	Eigenschaft	Menge von Indi-viduen

G. Frege, "Über Sinn und Bedeutung", 1892

"Sinn" entspricht "Intension"

"Bedeutung" entspricht "Extension"

Intensionale Logik (IL)

Die Menge der Typen für IL:

(i) e, t sind Typen

(ii) Wenn σ, τ Typen sind, dann ist auch $<\sigma, \tau>$ ein Typ.

(iii) Wenn τ ein Typ ist, dann auch $<s,\tau>$.

Das Alphabet von IL:

(1) logische Zeichen:

(i) $\neg , \wedge , \vee , \rightarrow , \leftrightarrow$

(ii) $\forall, \exists$

(iii) $=$

(iv) λ

(v) $\Diamond , \Box$, P , F , H , G

(vi) $\hat{}$, $\check{}$

(2) nicht-logische Zeichen:

(i) Für jeden Typ τ eine Menge von Variablen

$Var_\tau = \{ v_1^\tau, v_2^\tau, ...\}$

(ii) Für jeden Typ τ eine (möglicherweise leere) Menge von Konstanten $Con_\tau = \{a_1^\tau, a_2^\tau, ...\}$

Wohlgeformte Ausdrücke von IL

Für jeden Typ τ ist die Menge der wohlgeformten Ausdrücke vom Typ τ (ME_τ) gegeben durch:

(1) $Con_\tau \cup Var_\tau \subseteq ME_\tau$

(2) Wenn $\alpha \in ME_{<\sigma,\tau>}$ und $\beta \in ME_\sigma$, dann $\alpha(\beta) \in ME_\tau$

(3) Wenn $\alpha \in ME_\tau$ und $v \in Var_\sigma$, dann $\lambda v\, \alpha \in ME_{<\sigma,\tau>}$

(4) Wenn $\alpha, \beta \in ME_\tau$, dann $\alpha = \beta \in ME$

(5) Wenn $A, B \in ME_t$, dann $\neg A$, $(A \vee B)$, $(A \leftrightarrow B)$, $(A \rightarrow B)$, $(A \wedge B) \in ME_t$

(6) Wenn $A \in ME_t$ und v Variable eines bel. Typs, dann $\forall v A$ und $\exists v A \in ME_t$

(7) Wenn $A \in ME_t$, dann sind auch $\Box A$, $\Diamond A$, FA, GA, PA, HA $\in ME_t$

(8) Wenn $\alpha \in ME_\tau$, so ist $\hat{}\alpha \in ME_{<s,\tau>}$

(9) Wenn $\alpha \in ME_{<s,\tau>}$, so $\check{}\alpha \in ME_\tau$

Beispiele

Peter glaubt, dass es regnet.

Peter glaubt, dass es nicht regnet.

es-regnet' $\in ME_t$

$\hat{}$es-regnet' $\in ME_{<s,t>}$

nicht' $\in Con_{<t,t>}$

nicht'(es-regnet') $\in ME_t$

gestern' $\in Con_{<<s,t>,t>}$

gestern'($\hat{}$es-regnet') $\in ME_t$

glaubt' $\in Con_{<<s,t>,<e,t>>}$

glaubt'($\hat{}$es-regnet')(p*) $\in ME_t$

glaubt'($\hat{}$(nicht(es-regnet'))(p*) $\in ME_t$

Modellstruktur für IL

M = < U , D, W , T , < , V > mit

(1) (i) U, W, T $\neq$ Ø

(ii) U, W, T paarweise disjunkt

(2) < eine lineare Ordnung auf T

(3) D ist eine Familie von Wertebereichen für jeden Typ τ so, daß

$D_t = \{0, 1\}$

$D_e = U$

$D_{<\sigma,\tau>} = D_\tau^{D_\sigma}$

$D_{<s,\tau>} = D_\tau^{W\times T}$

(4) V ist eine Wertzuweisungsfunktion, die jeder nichtlogischen Konstanten vom Typ τ einen Wert aus $D_{<s,\tau>}$ zuweist.

Belegung:

Eine Funktion h, die jeder Variablen vom Typ τ einen Wert aus D_τ zuweist.

Interpretation für IL

Eine Interpretation für IL bzgl. einer Modellstruktur M = < U , D, W , T , < , V > ist eine Funktion, die jedem wohlgeformten Ausdruck α von IL für jedes w $\in$ W, t $\in$ T und jede Belegung h in der folgenden Weise einen Wert $[[\alpha]]^{M,w,t,h}$ zuweist:

(i) $[[\mathbf{v}]]^{\mathbf{M,w,t,h}}$ = h(v) für Variablen

(ii) $[[\mathbf{c}]]^{\mathbf{M,w,t,h}}$ = V(c) (< w,t>) für Konstanten

(iii) $[[\alpha(\beta)]]^{\mathbf{M,w,t,h}} = [[\alpha]]^{\mathbf{M,w,t,h}}([[\beta]]^{\mathbf{M,w,t,h}})$

(iv) $[[\lambda v\, \alpha]]^{\mathbf{M,w,t,h}}$ mit $v \in Var_\sigma$, $\alpha \in ME_\tau$ ist diejenige Abb. $\varphi: D_\sigma \to D_\tau$, so daß für $\delta \in D_\sigma$: $\varphi(\delta) = [[\beta]]^{\mathbf{M,w,t,h}_v^\delta}$

(v) $[[\alpha = \beta]]^{\mathbf{M,w,t,h}}$, $[[\neg \mathbf{A}]]^{\mathbf{M,w,t,h}}$, $[[\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}]]^{\mathbf{M,w,t,h}}$ etc.

wie in LPMT

(vi) $[[\forall\, \mathbf{v}\, \mathbf{A}]]^{\mathbf{M,w,t,h}} = 1$ [mit $v \in Var_\tau$] gdw. für alle $\delta \in D_\tau$

$[[\mathbf{A}]]^{\mathbf{M,w,t,h}_v^\delta} = 1$

$[[\exists\, \mathbf{v}\, \mathbf{A}]]^{\mathbf{M,w,t,h}}$ entsprechend

(vii) $[[\mathbf{FA}]]^{\mathbf{M,w,t,h}} = 1$ gdw. $[[\mathbf{A}]]^{\mathbf{M,w,t',h}} = 1$ für mind. ein t' > t

$[[\mathbf{PA}]]^{\mathbf{M,w,t,h}}$, $[[\mathbf{GA}]]^{\mathbf{M,w,t,h}}$, $[[\mathbf{HA}]]^{\mathbf{M,w,t,h}}$ entsprechend

(viii) $[[\Diamond\mathbf{A}]]^{\mathbf{M,w,t,h}} = 1$ gdw. $[[\mathbf{A}]]^{\mathbf{M,w',t',h}} = 1$ für mind. ein w' $\in$ W und ein t' $\in$ T

$[[\Box\mathbf{A}]]^{\mathbf{M,w,t,h}}$ entsprechend

(ix) $[[{}^\wedge\alpha]]^{\mathbf{M,w,t,h}}$ ist diejenige Abb. φ, so daß für alle w' $\in$ W, t' $\in$ T: $\varphi(<w',t'>) = [[\alpha]]^{\mathbf{M,w',t',h}}$.

(x) $[[{}^\vee\alpha]]^{\mathbf{M,w,t,h}} = [[\alpha]]^{\mathbf{M,w,t,h}}(<w,t>)$

Definition von Intension

Wenn $\alpha \in ME_\tau$, dann ist $Int^{M,h}(\alpha)$ diejenige Funktion $\varphi: W\times T \to D_\tau$, so daß für alle w $\in$ W, t $\in$ T: $\varphi(<w,t>) = [[\alpha]]^{\mathbf{M,w,t,h}}$.

Es gilt: $Int^{M,h}(\alpha) = [[{}^\wedge\alpha]]^{\mathbf{M,w,t,h}}$.

In IL hat man (objektsprachliche) Ausdrücke, mit denen man auf Intensionen referieren kann.

Intensional abgeschlossene Ausdrücke in IL

Def.:

α heißt intensional abgeschlossener Ausdruck

(Notation: $\alpha \in$ ICE) gdw.

	(i)	α ist eine Variable
oder	(ii)	α hat die Form $\Box A$ oder $\Diamond A$
oder	(iii)	α hat die Form $\hat{}\beta$
oder	(iv)	α enthält außer Junktoren, Quantoren und λ nur Elemente von ICE.

Es gilt:

Wenn $\alpha \in$ ICE, dann ist für alle w, w' $\in$ W und

t, t' $\in$ T $[\![\alpha]\!]^{\mathbf{M,w,t,h}} = [\![\alpha]\!]^{\mathbf{M,w',t',h}}$

Daraus folgt:

Falls $\alpha \in$ ICE, dann gilt : $\alpha = \hat{}\check{}\alpha$.

Äquivalenzen in IL

- Substituierbarkeit unter intensionaler

  Identität:

  $\alpha ,\ \beta = \gamma \quad \not\models_{IL} \quad \alpha\ ^{\gamma}/_{\beta}$

  aber:

  $\alpha ,\ \hat{}\beta = \hat{}\gamma \quad \models_{IL} \quad \alpha\ ^{\gamma}/_{\beta}$

- "Down-Up-Cancellation":

  $\models_{IL} \quad \check{}\hat{}\alpha = \alpha$

  aber:

  $\not\models_{IL} \quad \hat{}\check{}\alpha = \alpha$

λ-Konversion in IL

Es gilt:

$\models_{IL}\ \lambda v\alpha\,(\beta) = \alpha\ ^{\beta}/_{v}$

gdw.

(i) wenn jede in β vorkommende freie Variable v' frei für v in α ist

(ii) $\beta \in$ ICE oder

kein freies Vorkommen von v in α sich im Skopus von $\Box$, $\Diamond$, F, P, G, H oder $\hat{}$ befindet .

Intensionale Logik und Montague-Grammatik

1. Motivation der MG

2. Kategorialgrammatik

3. Fragmente des Deutschen und Englischen

4. Übersetzung des Fragments in die IL

5. Quantifying-In

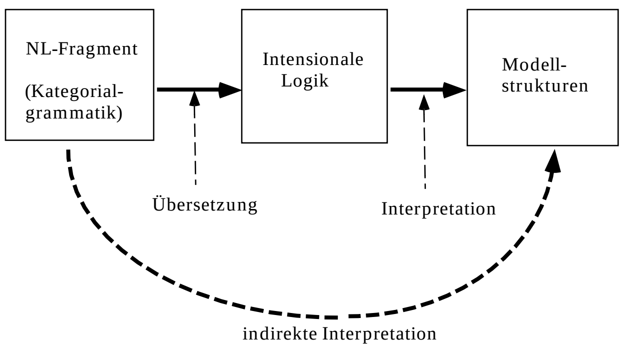
Montague-Grammatik

Der amerikanische Logiker Richard Montague war der Ansicht, dass kein wesentlicher Unterschied besteht zwischen natürlichen und formalen Sprachen. Natürliche Sprachen sind prinzipiell den selben formalen Methoden zugänglich wie z.B. die Sprachen der formalen Logik.

> "There is in my opinion no important theoretical difference between natural languages and the artificial languages of logicians; indeed, I consider it possible to comprehend the syntax and semantics of both kinds of languages within a single natural and mathematically precise theory."
>
> Montague 1970 "Universal Grammar".

Das Formalisieren von Ausdrücken einer natürlichen Sprache ist in der Montague-Grammatik keine "Kunst" mehr, die man nur durch viel Üben erlernen kann, sondern es gibt präzise Übersetzungsregeln, die einem Ausdruck der natürlichen Sprache einen (gleichbedeuten-den) Ausdruck der Intensionalen Logik zuweisen.

Für die IL gibt es eine präzise formale Semantik, also gibt es - indirekt - auch eine präzise Semantik für die Ausdrücke der natürlichen Sprache.



Schema der Montague-Grammatik

Kategorialgrammatik

<u>Kategorien:</u>

(1) S, N sind Kategorien

(2) Wenn A, B Kategorien sind, so auch A/B und A\B

<u>Regeln:</u>

(1) A $\rightarrow$ A/B B

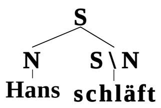
(2) A $\rightarrow$ B A\B

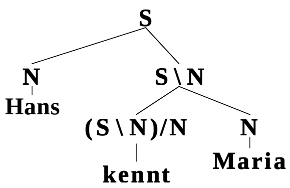
Beispiel:

Hans, Maria : N

schläft: S \ N

kennt: (S \ N) / N





Syntax-Fragment I

B_A: Menge lexikalischer Ausdrücke ('Basic expressions') der Kategorie A

P_A: Menge der Ausdrücke ('Phrases') der Kategorie A

Beispiel-Lexikon:

B_N = { *Hans*, *Maria* }

$B_{S \backslash N}$ = { *schläft* }

$B_{(S \backslash N)/N}$ = { *kennt* }

Syntaktische Regeln:

S0. $B_A \subseteq P_A$, für jede Kategorie A.

S1. Wenn $\alpha \in P_{A/B}$, $\beta \in P_B$, so ist $F_1 (\alpha, \beta) \in P_A$, wobei $F_1 (\alpha, \beta) = \alpha\beta$.

S2. Wenn $\alpha \in P_{A \backslash B}$, $\beta \in P_B$, so ist $F_2 (\alpha, \beta) \in P_A$, wobei $F_2 (\alpha, \beta) = \beta\alpha$.

Beispiel:

F_2 (*schläft*, *Hans*) = *Hans schläft* $\in P_S$

Übersetzung NL $\Rightarrow$ IL

f ist eine Abbildung, die jeder (NL-)Kategorie in der folgenden Weise einen (IL-)Typ zuordnet:

f(S) = t

f(N) = e

f(A / B) = f(A \ B) = <f(B), f(A)>

Eine Übersetzung von natürlicher Sprache in IL ist ein Homomorphismus, der jedem

$\alpha \in P_A$ ein $\alpha' \in ME_{f(A)}$ zuordnet.

Notation: $\alpha \Rightarrow \alpha'$

Übersetzungsregeln:

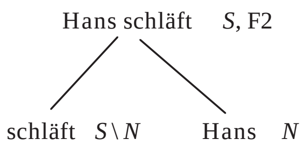
T0. *Hans* $\Rightarrow$ Hans' , *Maria* $\Rightarrow$ Maria'

schläft $\Rightarrow$ schläft' , *kennt* $\Rightarrow$ kennt'

T1. Wenn $\alpha \in P_{A/B}$, $\beta \in P_B$, $\alpha \Rightarrow \alpha'$, $\beta \Rightarrow \beta'$, so $F_1 (\alpha, \beta) \Rightarrow \alpha'(\beta')$.

T2. Wenn $\alpha \in P_{A \backslash B}$, $\beta \in P_B$, $\alpha \Rightarrow \alpha'$, $\beta \Rightarrow \beta'$, so $F_2 (\alpha, \beta) \Rightarrow \alpha'(\beta')$.

Beispiel 1:



schläft $\Rightarrow$ schläft'
Hans $\Rightarrow$ Hans'

F2(schläft, Hans) = Hans schläft

$\Rightarrow$ schläft'(Hans')

Beispiel 2:

Hans kennt Maria S, F2

kennt Maria $S\backslash N$, F1 Hans N

kennt $(S\backslash N)/N$ Maria, N

F1(kennt, Maria) = kennt Maria $\Rightarrow$ kennt'(Maria')

F2(kennt Maria, Hans) = Hans kennt Maria

$\Rightarrow$ kennt'(Maria')(Hans')

Syntax-Fragment II

Kategorien:

(1) S, IV, CN sind Kategorien

(2) Wenn A, B Kategorien sind, dann auch A / B

Vorkommende Kategorien und Beispiellexikon:

Satz	S	---
Gattungs-substantiv	CN	*man, woman, park, language*
(intransitive) Verbphrase	IV	*run,walk talk, sleep*
Nominalphrase (Termphrase)	T [= S/IV]	*John, Mary, he₀, he₁, ...*
Determinator	DET [= (S/IV)/CN]	*every, no, a*
Transitive Verbphrase	TV [= IV/(S/IV)]	*find, love, be, seek*
Satzadverb	S/S	*necessarily*
Verb mit Satzkomplement	IV/S	*believe*
Attributives Adjektiv	CN/CN	*green, large*

Übersetzung NL $\Rightarrow$ IL, II.Version

f ist eine Abbildung, die jeder (NL-)Kategorie in der folgenden Weise einen (IL-)Typ zuordnet:

f(S) = t

f(IV) = f(CN) = <e, t>

f(A / B) = <<s, f(B)>, f(A)>

Eine Übersetzung von natürlicher Sprache in IL ist ein Homomorphismus, der jedem

$\alpha \in P_A$ ein $\alpha' \in ME_{f(A)}$ zuordnet.

Übersetzungen lexikalischer Ausdrücke:

Für alle Ausdrücke $\alpha \in B_A$, $A \neq$ T, DET:

$\alpha \Rightarrow \alpha'$, $\alpha' \in Con_{f(A)}$

John	$\Rightarrow$	$\lambda F\ {}^\vee F(j^*)$
Mary	$\Rightarrow$	$\lambda F\ {}^\vee F(m^*)$
he_n	$\Rightarrow$	$\lambda F\ {}^\vee F(x_n)$
every	$\Rightarrow$	$\lambda F\ \lambda G\ \forall x({}^\vee F(x) \rightarrow {}^\vee G(x))$
a	$\Rightarrow$	$\lambda F\ \lambda G\ \exists x({}^\vee F(x)\ \&\ {}^\vee G(x))$
no	$\Rightarrow$	$\lambda F\ \lambda G\ \neg\exists x({}^\vee F(x)\ \&\ {}^\vee G(x))$
the	$\Rightarrow$	$\lambda F\ \lambda G\ \exists x(\forall y({}^\vee F(x) \leftrightarrow x=y)\ \&\ {}^\vee G(x))$
necessarily	$\Rightarrow$	$\lambda p\ [\Box\ {}^\vee p]$

Syntax- und Übersetzungsregeln II

S1. Wenn $\delta \in P_{IV}$ und $\zeta \in P_T$, so ist $F_1(\zeta, \delta) \in P_S$, wobei $F_1(\zeta, \delta) = \zeta\delta'$, und δ' ist der Ausdruck, der entsteht, wenn man das in δ vorkommende Verb durch die 3. Person Sg. Präsens dieses Verbs ersetzt.

T1. Wenn $\zeta \in P_T$, $\delta \in P_{IV}$, $\zeta \Rightarrow \zeta'$, $\delta \Rightarrow \delta'$, so $F_1(\zeta, \delta) \Rightarrow \zeta'({}^\wedge\delta')$.

S2. Wenn $\zeta \in P_{DET}$ und $\delta \in P_{CN}$, so ist $F_2(\zeta, \delta) \in P_T$, wobei $F_2(\zeta, \delta) = \zeta\delta$.

T2. Wenn $\zeta \in P_{DET}$, $\delta \in P_{CN}$, $\zeta \Rightarrow \zeta'$, $\delta \Rightarrow \delta'$, so $F_2(\zeta, \delta) \Rightarrow \zeta'({}^\wedge\delta')$.

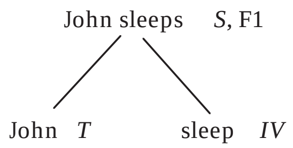
S3. Wenn $\zeta \in P_{S/S}$ und $\phi \in P_S$, so ist $F_2(\zeta, \phi) \in P_S$.

T3. Wenn $\zeta \in P_{S/S}$, $\phi \in P_S$, $\zeta \Rightarrow \zeta'$, $\phi \Rightarrow \phi'$, so $F_2(\zeta, \phi) \Rightarrow \zeta'({}^\wedge\phi')$.

S4. Wenn $\zeta \in P_{IV/S}$ und $\phi \in P_S$, so ist $F_3(\zeta, \phi) \in P_S$, wobei $F_3(\zeta, \phi) = \zeta$ ***that*** ϕ.

T4. Wenn $\zeta \in P_{IV/S}$, $\phi \in P_S$, $\zeta \Rightarrow \zeta'$, $\phi \Rightarrow \phi'$, so $F_3(\zeta, \phi) \Rightarrow \zeta'({}^\wedge\phi')$.

Beispiel 3:

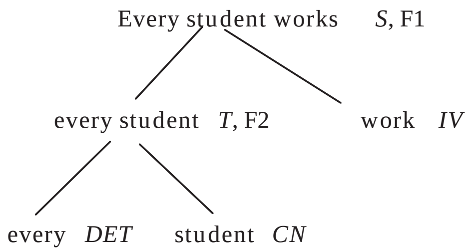


John $\Rightarrow$ $\lambda F[{}^\vee F(j^*)]$
sleep $\Rightarrow$ sleep'

John sleeps $\Rightarrow$ $\lambda F[{}^\vee F(j^*)]({}^\wedge sleep')$

$\Leftrightarrow$ ${}^{\vee\wedge}sleep'(j^*)$ $\Leftrightarrow$ $sleep'(j^*)$

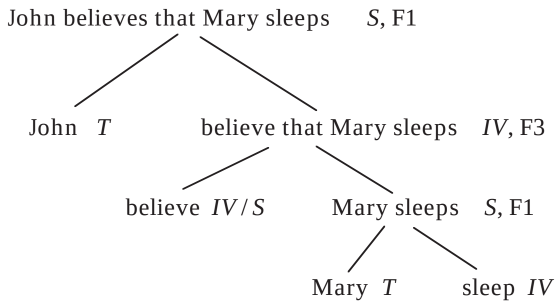
Beispiel 4:



every student $\Rightarrow$ $\lambda F[\lambda G[\forall x({}^\vee F(x) \to {}^\vee G(x))]]({}^\wedge student')$
$\Leftrightarrow$ $\lambda G[\forall x({}^{\vee\wedge}student'(x) \to {}^\vee G(x))]$
$\Leftrightarrow$ $\lambda G[\forall x(student'(x) \to {}^\vee G(x))]$

every student works
$\Rightarrow$ $\lambda G[\forall x({}^{\vee\wedge}student'(x) \to {}^\vee G(x))]({}^\wedge work')$
$\Rightarrow$ $\forall x(student'(x) \to {}^{\vee\wedge}work'(x))$
$\Rightarrow$ $\forall x(student'(x) \to work'(x))$

Beispiel 5:



Mary sleeps $\Rightarrow$ $sleep'(m^*)$
believe $\Rightarrow$ believe'
believe that Mary sleeps $\Rightarrow$ $believe'({}^\wedge sleep'(m^*))$
John $\Rightarrow$ $\lambda F[{}^\vee F(j^*)]$

John believes that Mary sleeps

$\Rightarrow$ $\lambda F[{}^\vee F(j^*)](believe'({}^\wedge sleep'(m^*)))$

$\Leftrightarrow$ $believe'({}^\wedge sleep'(m^*))(j^*)$

Hineinquantifizieren (Quantifying in)

S5, n. Wenn $\zeta \in P_T$ und $\phi \in P_S$, so ist $F_{4,n}(\zeta, \phi) \in P_S$, wobei $F_{4,n}(\zeta, \phi) = \phi'$ und ϕ' dadurch aus ϕ entsteht, daß das erste Vorkommen von he_n in ϕ durch ζ und jedes weitere Vorkommen von he_n in ϕ durch die geeignete Form der Personalpronomen *he, she, it* ersetzt wird.

T5, n. Wenn $\zeta \in P_T$, $\phi \in P_S$, $\zeta \Rightarrow \zeta'$, $\phi \Rightarrow \phi'$, so $F_{4,n}(\zeta, \phi) \Rightarrow \zeta'({}^\wedge\lambda x_n \phi')$.

Hineinquantifizieren - Beispiele

$F_{4,0}$(John, he_0 sleeps) = John sleeps

$F_{4,3}$(A student, he_3 sleeps) = A student sleeps

$F_{4,1}$(John, he_1 believes that he_1 sleeps) = John believes that he sleeps

$F_{4,1}$(John, he_1 believes that he_2 sleeps) = John believes that he_2 sleeps

$F_{4,2}$(John, he_1 believes that he_2 sleeps) = he_1 believes that John sleeps

$F_{4,2}$(John, he_1 believes that he_1 sleeps) = he_1 believes that he_1 sleeps

Beispiel 6:

John sleeps S, $F_{4,0}$

John T he_0 sleeps S, F1

he_0 T sleep IV

John $\Rightarrow$ $\lambda F[{}^{\vee}F(j^*)]$
sleep $\Rightarrow$ sleep'
he_0 $\Rightarrow$ $\lambda G[{}^{\vee}G(x_0)]$

he_0 sleeps $\Rightarrow$ $\lambda G[{}^{\vee}G(x_0)]({}^{\wedge}sleep')$
$\Leftrightarrow$ ${}^{\vee\wedge}sleep'(x_0)$
$\Leftrightarrow$ $sleep'(x_0)$

John sleeps $\Rightarrow$ $\lambda F[{}^{\vee}F(j^*)]({}^{\wedge}\lambda x_0[sleep'(x_0)])$
$\Leftrightarrow$ ${}^{\vee\wedge}\lambda x_0[sleep'(x_0)](j^*)$
$\Leftrightarrow$ $sleep'(j^*)$

Beispiel 7:

necessarily John sleeps S, F2

necessarily S/S John sleeps S, F1

John T sleep IV

John sleeps $\Rightarrow$ $sleep'(j^*)$
necessarily $\Rightarrow$ $\lambda p[\Box\, {}^{\vee}p]$

necessarily John sleeps $\Rightarrow$ $\lambda p[\Box\, {}^{\vee}p]({}^{\wedge}sleep'(j^*))$

$\Leftrightarrow$ $\Box\, {}^{\vee\wedge}\, sleep'(j^*)$
$\Leftrightarrow$ $\Box\, sleep'(j^*)$

Beispiel 8:

1. Lesart:

necessarily a student sleeps S, F2

necessarily S/S a student sleeps S, F1

a student T, F2   sleep
IV

a DET student CN

a student sleeps $\Rightarrow$ $\exists x[student'(x) \wedge sleep'(x)]$

necessarily a student sleeps

$\Rightarrow$ $\lambda p[\Box\, {}^{\vee}p]({}^{\wedge}\exists x[student'(x) \wedge sleep'(x)])$
$\Leftrightarrow$ $\Box\, {}^{\vee\wedge}\exists x[student'(x) \wedge sleep'(x)]$
$\Leftrightarrow$ $\Box\, \exists x[student'(x) \wedge sleep'(x)]$

Beispiel 9:

2. Lesart:

necessarily a student sleeps S, $F_{4,0}$

a student T , F2   necessarily he_0 sleeps S, F2

necessarily S/S he_0 sleeps S,, F1

he_0 T sleep IV

he_0 sleeps $\Rightarrow$ $\lambda G[{}^{\vee}G(j^*)]({}^{\wedge}sleep')$
$\Rightarrow$ $sleep'(j^*)$

necessarily he_0 sleeps $\Rightarrow$ $\lambda p[\Box\, {}^{\vee}p]({}^{\wedge}sleep'(x_0))$
$\Rightarrow$ $\Box\, sleep'(x_0)$

a student $\Rightarrow$ $\lambda F[\exists x(student'(x) \wedge {}^{\vee}F(x))]$

necessarily a student sleeps

$\Rightarrow$ $\lambda F[\exists x(student'(x) \wedge {}^{\vee}F(x))]({}^{\wedge}\lambda x_0[\Box\, sleep'(x_0)])$
$\Leftrightarrow$ $\exists x[student'(x) \wedge {}^{\vee\wedge}\lambda x_0[\Box\, sleep'(x_0)](x)]$
$\Leftrightarrow$ $\exists x[student'(x) \wedge \Box\, sleep'(x)]$