Lösungen für die Aufgaben der Probeklausur (Einführung in die Semantik)

Aufg.1
Lpt-Formeln

Aufg. 1 (a) Wahrheitsbedingungen relativ zu Modell M, Zeitpunkt t und Belegung h:

(i) $[\![\mathbf{FH}\forall x(F(x) \rightarrow G(x))]\!]_{M,t,h} = 1$
gdw es gibt ein t': t < t' und $[\![\mathbf{H}\forall x(F(x) \rightarrow G(x))]\!]_{M,t',h} = 1$

gdw es gibt ein t': t < t' und für alle t'' mit t'' < t' gilt:
$[\![\forall x(F(x) \rightarrow G(x))]\!]_{M,t'',h} = 1$

gdw es gibt ein t': t < t' und für alle t'' mit t'' < t' gilt:
für alle d ∈ U gilt: $[\![(F(x) \rightarrow G(x))]\!]_{M,t'',h^d/x} = 1$

gdw es gibt ein t': t < t' und für alle t'' mit t'' < t' gilt:
für alle d ∈ U gilt:
entweder $[\![F(x)]\!]_{M,t'',h^d/x} = 0$
oder $[\![G(x)]\!]_{M,t'',h^d/x} = 1$

gdw es gibt ein t': t < t' und für alle t'' mit t'' < t' gilt:
für alle d ∈ U gilt:
entweder $[\![x]\!]_{M,t'',h^d/x} \notin [\![F]\!]_{M,t'',h^d/x}$
oder $[\![x]\!]_{M,t'',h^d/x} \in [\![G]\!]_{M,t'',h^d/x}$

gdw es gibt ein t': t < t' und für alle t'' mit t'' < t' gilt:
für alle d ∈ U gilt:
entweder $[\![x]\!]_{M,t'',h^d/x} \notin [\![F]\!]_{M,t'',h^d/x}$
oder $[\![x]\!]_{M,t'',h^d/x} \in [\![G]\!]_{M,t'',h^d/x}$

gdw es gibt ein t': t < t' und für alle t'' mit t'' < t' gilt:
für alle d ∈ U gilt:
entweder $h^d/x(x) \notin V(F)(t'')$
oder $h^d/x(x) \in V(G)(t'')$

gdw

es gibt ein t': t < t' und für alle t'' mit t'' < t' gilt: für alle d ∈ U gilt: entweder d ∉ V(F)(t'') oder d ∈ V(G)(t'')

(ii) $[\![\mathbf{P}\neg\mathbf{F}\exists x(F(x) \wedge G(x))]\!]_{M,t,h} = 1$

gdw es gibt ein t': t' < t mit $[\![\neg\mathbf{F}\exists x(F(x) \wedge G(x))]\!]_{M,t',h} = 1$

gdw es gibt ein t': t' < t so dass es kein t'' gibt mit t' < t'' und $[\![\exists x(F(x) \wedge G(x))]\!]_{M,t'',h} = 1$

gdw es gibt ein t': t' < t so dass es kein t'' gibt mit t' < t'' und es gibt ein d ∈ U mit $[\![F(x) \wedge G(x)]\!]_{M,t'',h^d/x} = 1$

gdw es gibt ein t': t' < t so dass es kein t'' gibt mit t' < t'' und es gibt ein d ∈ U mit
$[\![F(x)]\!]_{M,t'',h^d/x} = 1$ und $[\![G(x)]\!]_{M,t'',h^d/x} = 1$

gdw es gibt ein t': t' < t so dass es kein t'' gibt mit t' < t'' und es gibt ein d ∈ U mit
$[\![x]\!]_{M,t'',h^d/x} \in [\![F]\!]_{M,t'',h^d/x}$ und
$[\![x]\!]_{M,t'',h^d/x} \in [\![G]\!]_{M,t'',h^d/x}$

gdw es gibt ein t': t' < t so dass es kein t'' gibt mit t' < t'' und es gibt ein d ∈ U mit
$h^d/x(x) \in V(F)(t'')$ und
$h^d/x(x) \in V(G)(t'')$

gdw

es gibt ein t': t' < t so dass es kein t'' gibt mit t' < t'' und es gibt ein d ∈ U mit d ∈ V(F)(t'') und d ∈ V(G)(t'')

(iii) $[\![\forall x(F(x) \vee G(x))]\!]_{M,t,h} = 1$

gdw für alle d ∈ U gilt $[\![F(x) \vee G(x)]\!]_{M,t,h^d/x} = 1$

gdw für alle d ∈ U gilt
entweder $[\![F(x)]\!]_{M,t,h^d/x} = 1$
oder $[\![G(x)]\!]_{M,t,h^d/x} = 1$

gdw für alle d ∈ U gilt
entweder $h^d/x(x) \in V(F)(t)$
oder $h^d/x(x) \in V(G)(t)$
gdw

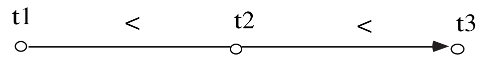
für alle d ∈ U gilt entweder d ∈ V(F)(t) und oder d ∈ V(G)(t)

Aufg. 1 (b)

Zeige, dass
$\{\mathbf{FH}\forall x(F(x) \rightarrow G(x)), \mathbf{P}\neg\mathbf{F}\exists x(F(x) \wedge G(x)), \forall x(F(x) \vee G(x))\}$ konsistent (simultan erfüllbar) ist.

Folgende Modellstruktur zeigt dies:

$M = \langle U, T, <, V \rangle$ $T = \{t1, t2, t3\}$ $U = \{1\}$



$V(F)(t1) = \varnothing$
$V(G)(t1) = \{1\}$

$V(F)(t2) = \varnothing$
$V(G)(t2) = \{1\}$

$V(F)(t3) = \varnothing$
$V(G)(t3) = \{1\}$

Die Formelmenge ist z.B. am Zeitpunkt t2 in M simultan erfüllt

Aufg. 2

Eigenschaften der Modellstrukturen für folgende Lpt-Formeln.
(i) $\mathbf{FG}(p \wedge \neg p)$
(ii) $\mathbf{F}(\mathbf{G}p \wedge \mathbf{G}\neg p)$

zu **(i)**:

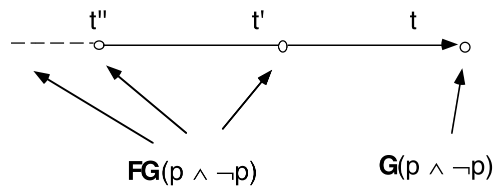
Zunächst einmal gilt: die Formel $p \wedge \neg p$ ist eine Kontradiktion und daher an keinem Zeitpunkt wahr!

$[\![\mathbf{G}(p \wedge \neg p)]\!]_{M,t,h} = 1$ gdw für alle $t' \in T$: wenn $t' > t$, dann $[\![p \wedge \neg p]\!]_{M,t',h} = 1$

Da das Konsequent des Konditionals in der Wahrheitsbedingung nie wahr sein kann, kann die gesamte Wahrheitsbedingung nur erfüllt sein, wenn das Antezedent ($t' > t$) immer falsch ist, d.h. wenn es kein t' nach t gibt, d.h. wenn t der letzte Zeitpunkt von $\langle T, < \rangle$ ist.

$\mathbf{G}(p \wedge \neg p)$ kann also nur am letzten Zeitpunkt einer Zeitstruktur wahr sein, d.h. $\langle T, < \rangle$ muss einen Endpunkt haben.

$\mathbf{FG}(p \wedge \neg p)$ ist dann an allen ausser dem letzten Zeitpunkt einer endenden Zeitstruktur wahr. (T muss mindestens zwei Zeitpunkte enthalten.)



Zu (ii) $\mathbf{F}(\mathbf{G}p \wedge \mathbf{G}\neg p)$

Sowohl $\mathbf{G}p$ als auch $\mathbf{G}\neg p$ können nur am letzten Zeitpunkt einer endenden Zeitstuktur wahr sein.

Also ist $\mathbf{F}(\mathbf{G}p \wedge \mathbf{G}\neg p)$ an jedem ausser dem letzten Zeitpunkt einer endenden Zeitstruktur wahr. (T muss mindestens zwei Elemente haben.)

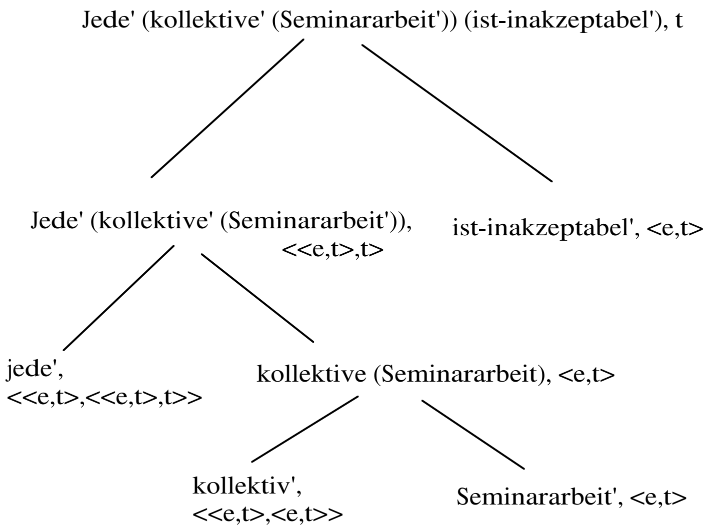
<u>Aufg. 3</u>

Jede kollektive Seminararbeit ist inakzeptabel.

Aufg. 3 (a) Übersetze in Prädikatenlogik 1. Stufe:

$\forall x[(\mathrm{kollektiv}'(x) \wedge \mathrm{Seminararbeit}'(x)) \rightarrow \mathrm{inakzeptabel}(x)]$

Aufg.3 (b) Übersetze in extens. Typtheorie mit "Typenbaum"



Aufg. 3 (c) Gib komplexe Lexikoneinträge für Wörter an:

jede' $\Rightarrow$ $\lambda P \lambda Q[\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))]$

kollektiv' $\Rightarrow$ $\lambda P \lambda x[\exists y \exists z(\neg y = z \wedge (\mathrm{Pers}(y) \wedge \mathrm{Pers}(z) \wedge P(x) \wedge \mathrm{beitr}(y,x) \wedge \mathrm{beitr}(z,x))]$

Seminararbeit' $\Rightarrow$ $\lambda x[\exists y(\mathrm{Seminar}'(y) \wedge \mathrm{Arbeit}'(x) \wedge \mathrm{Teil\text{-}von}'(x,y))]$

inakzeptabel' $\Rightarrow$ $\lambda x \neg \Diamond \exists y(\mathrm{Pers}(y) \wedge \mathrm{akzeptieren}'(y,x))$

Aufg. 3 (d) Typtheoretische Übersetzung des Satzes mit Hilfe obiger Lexikoneinträge, dann Reduktion soweit wie möglich.

kollektiv'(Seminararbeit') $\Rightarrow$ $\lambda P \lambda x[\exists y \exists z(\neg y = z \wedge (\mathrm{Pers}(y) \wedge \mathrm{Pers}(z) \wedge P(x) \wedge \mathrm{beitr}(y,x) \wedge \mathrm{beitr}(z,x))](\lambda x[\exists y(\mathrm{Seminar}'(y) \wedge \mathrm{Arbeit}'(x) \wedge \mathrm{Teil\text{-}von}'(x,y))])$

$\Rightarrow$ $\lambda x[\exists y \exists z(\neg y = z \wedge (\mathrm{Pers}(y) \wedge \mathrm{Pers}(z) \wedge \lambda x[\exists y(\mathrm{Seminar}'(y) \wedge \mathrm{Arbeit}'(x) \wedge \mathrm{Teil\text{-}von}'(x,y))](x) \wedge \mathrm{beitr}(y,x) \wedge \mathrm{beitr}(z,x))]$

$\Rightarrow$ $\lambda x[\exists y \exists z(\neg y = z \wedge (\mathrm{Pers}(y) \wedge \mathrm{Pers}(z) \wedge \exists y(\mathrm{Seminar}'(y) \wedge \mathrm{Arbeit}'(x) \wedge \mathrm{Teil\text{-}von}'(x,y)) \wedge \mathrm{beitr}(y,x) \wedge \mathrm{beitr}(z,x))]$

jede'(kollektiv'(Seminararbeit')) $\Rightarrow$ $\lambda P \lambda Q[\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))](\lambda x[\exists y \exists z(\neg y = z \wedge (\mathrm{Pers}(y) \wedge \mathrm{Pers}(z) \wedge \exists y(\mathrm{Seminar}'(y) \wedge \mathrm{Arbeit}'(x) \wedge \mathrm{Teil\text{-}von}'(x,y)) \wedge \mathrm{beitr}(y,x) \wedge \mathrm{beitr}(z,x))])$

$\Rightarrow$ $\lambda Q[\forall x(\exists y \exists z(\neg y = z \wedge (\mathrm{Pers}(y) \wedge \mathrm{Pers}(z) \wedge \exists y(\mathrm{Seminar}'(y) \wedge \mathrm{Arbeit}'(x) \wedge \mathrm{Teil\text{-}von}'(x,y)) \wedge \mathrm{beitr}(y,x) \wedge \mathrm{beitr}(z,x)) \rightarrow Q(x))]$

jede'(kollektiv'(Seminararbeit'))(inakzeptabel')

$\Rightarrow$ $\lambda Q[\forall x(\exists y \exists z(\neg y = z \wedge (\mathrm{Pers}(y) \wedge \mathrm{Pers}(z) \wedge \exists y(\mathrm{Seminar}'(y) \wedge \mathrm{Arbeit}'(x) \wedge \mathrm{Teil\text{-}von}'(x,y)) \wedge \mathrm{beitr}(y,x) \wedge \mathrm{beitr}(z,x)) \rightarrow Q(x))](\lambda x \neg \Diamond \exists y(\mathrm{Pers}(y) \wedge \mathrm{akzeptieren}'(y,x)))$

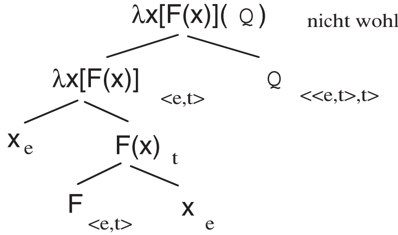
$\Rightarrow$ $\forall x(\exists y \exists z(\neg y = z \wedge (\mathrm{Pers}(y) \wedge \mathrm{Pers}(z) \wedge \exists y(\mathrm{Seminar}'(y) \wedge \mathrm{Arbeit}'(x) \wedge \mathrm{Teil\text{-}von}'(x,y)) \wedge \mathrm{beitr}(y,x) \wedge \mathrm{beitr}(z,x)) \rightarrow \lambda x \neg \Diamond \exists y(\mathrm{Pers}(y) \wedge \mathrm{akzeptieren}'(y,x))(x))$

$\Rightarrow$ $\forall x(\exists y \exists z(\neg y = z \wedge (\mathrm{Pers}(y) \wedge \mathrm{Pers}(z) \wedge \exists y(\mathrm{Seminar}'(y) \wedge \mathrm{Arbeit}'(x) \wedge \mathrm{Teil\text{-}von}'(x,y)) \wedge \mathrm{beitr}(y,x) \wedge \mathrm{beitr}(z,x)) \rightarrow \neg \Diamond \exists y(\mathrm{Pers}(y) \wedge \mathrm{akzeptieren}'(y,x)))$

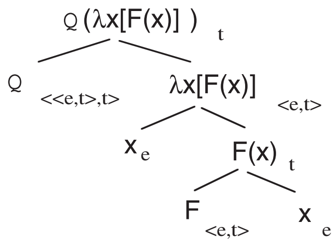
Aufg.4 Formeln von $L_{\lambda MT}$

(a) Typenbäume
(b) Reduzierungen, falls möglich

(i) (a)

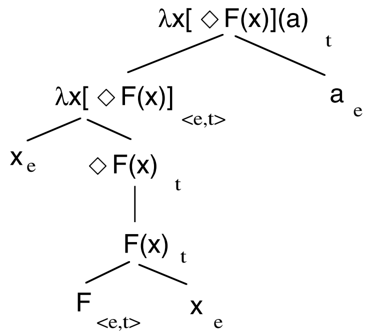


(ii) (a)



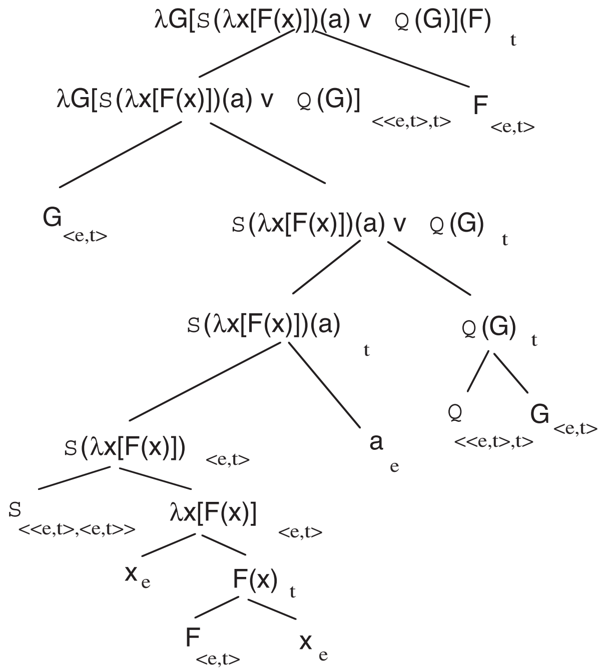
(b) Q(F)

(iii) (a)



(b) kann nicht weiter reduziert werden, da a kein ICE ist und x in ◇F(x) im Skopus eines intensionalen Operators ist

(iv) (a)



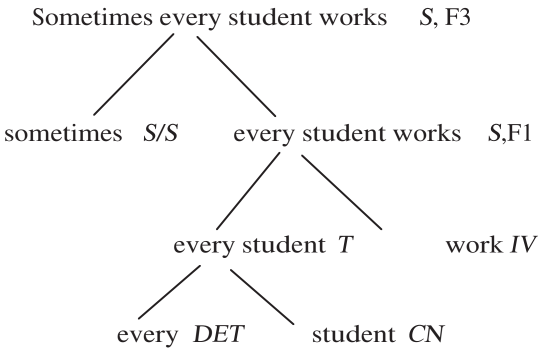
(b) $\Rightarrow$ S(λx[F(x)])(a) v Q(F) $\Rightarrow$ S(F)(a) v Q(F)

Aufg.5 Analysiere im Montague-Fragment den Satz

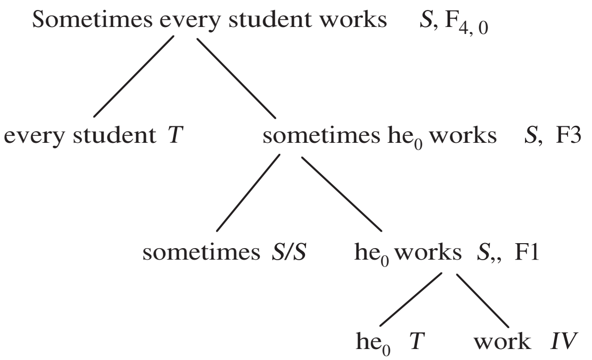
Sometimes every student works

Aufg.5 (a)

1. Lesart:



2. Lesart:



Aufg. 5 (b) Übersetze die zwei Lesarten des engl. Satzes in IL und reduziere so weit wie möglich.

every	$\Rightarrow$	$\lambda F \lambda G[\forall x({}^\vee F(x) \to {}^\vee G(x))]$
student	$\Rightarrow$	**student'**
work	$\Rightarrow$	**work'**
sometimes	$\Rightarrow$	$\lambda p[\mathbf{P}{}^\vee p \vee \mathbf{F}{}^\vee p \vee {}^\vee p]$

1. Lesart (de dicto):

every student $\Rightarrow$ $\lambda F \lambda G[\forall x({}^\vee F(x) \to {}^\vee G(x))]({}^\wedge\text{student'})$

$\Rightarrow$ $\lambda G[\forall x({}^\vee{}^\wedge\text{student'}(x) \to {}^\vee G(x))]$

$\Rightarrow$ $\lambda G[\forall x(\text{student'}(x) \to {}^\vee G(x))]$

every student works $\Rightarrow$ $\lambda G[\forall x(\text{student'}(x) \to {}^\vee G(x))]({}^\wedge\text{work'})$

$\Rightarrow$ $\lambda G[\forall x(\text{student'}(x) \to {}^\vee{}^\wedge\text{work'}(x))]$

$\Rightarrow$ $\forall x(\text{student'}(x) \to \text{work'}(x))$

sometimes every student works $\Rightarrow$ $\lambda p[\mathbf{P}{}^\vee p \vee \mathbf{F}{}^\vee p \vee {}^\vee p]({}^\wedge\forall x(\text{student'}(x) \to \text{work'}(x)))$

$\Rightarrow$ $\mathbf{P}{}^\vee{}^\wedge\forall x(\text{student'}(x) \to \text{work'}(x)) \vee \mathbf{F}{}^\vee{}^\wedge\forall x(\text{student'}(x) \to \text{work'}(x)) \vee {}^\vee{}^\wedge\forall x(\text{student'}(x) \to \text{work'}(x))$

$\Rightarrow$ $\mathbf{P}\forall x(\text{student'}(x) \to \text{work'}(x)) \vee \mathbf{F}\forall x(\text{student'}(x) \to \text{work'}(x)) \vee \forall x(\text{student'}(x) \to \text{work'}(x))$

2. Lesart (de re):

he_0 $\Rightarrow$ $\lambda F[{}^\vee F(x_0)]$

he_0 works $\Rightarrow$ $\lambda F[{}^\vee F(x_0)]({}^\wedge\text{work'})$ $\Rightarrow$ ${}^\vee{}^\wedge\text{work'}(x_0)$ $\Rightarrow$ $\text{work'}(x_0)$

sometimes he_0 works $\Rightarrow$ $\lambda p[\mathbf{P}{}^\vee p \vee \mathbf{F}{}^\vee p \vee {}^\vee p]({}^\wedge\text{work'}(x_0))$

$\Rightarrow$ $\mathbf{P}{}^\vee{}^\wedge\text{work'}(x_0) \vee \mathbf{F}{}^\vee{}^\wedge\text{work'}(x_0) \vee {}^\vee{}^\wedge\text{work'}(x_0)$

$\Rightarrow$ $\mathbf{P}\text{work'}(x_0) \vee \mathbf{F}\text{work'}(x_0) \vee \text{work'}(x_0)$

sometimes every student works $\Rightarrow$ $\lambda G[\forall x(\text{student'}(x) \to {}^\vee G(x))]({}^\wedge\lambda x_0[\mathbf{P}\text{work'}(x_0) \vee \mathbf{F}\text{work'}(x_0) \vee \text{work'}(x_0)])$

$\Rightarrow$ $\forall x(\text{student'}(x) \to {}^\vee{}^\wedge\lambda x_0[\mathbf{P}\text{work'}(x_0) \vee \mathbf{F}\text{work'}(x_0) \vee \text{work'}(x_0)](x))$

$\Rightarrow$ $\forall x(\text{student'}(x) \to \lambda x_0[\mathbf{P}\text{work'}(x_0) \vee \mathbf{F}\text{work'}(x_0) \vee \text{work'}(x_0)](x))$

$\Rightarrow$ $\forall x(\text{student'}(x) \to [\mathbf{P}\text{work'}(x) \vee \mathbf{F}\text{work'}(x) \vee \text{work'}(x)])$