Programmierkurs Python II

Michaela Regneri
FR 4.7 Allgemeine Linguistik (Computerlinguistik)
Universität des Saarlandes

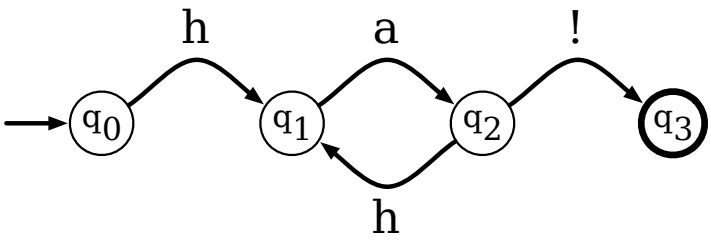
Sommersemester 2013

Endliche Automaten

- Endliche Automaten sind einfache Modelle zur Beschreibung regulärer Sprachen.
  ⇒ für jede reguläre Sprache L gibt es einen entsprechenden Automaten M, der L erkennt (akzeptiert).
- Endliche Automaten sind äquivalent zu regulären Ausdrücken:
  ⇒ für jeden regulären Ausdruck gibt es einen äquivalenten endlichen Automaten (und umgelehrt).

Zustandsdiagramme

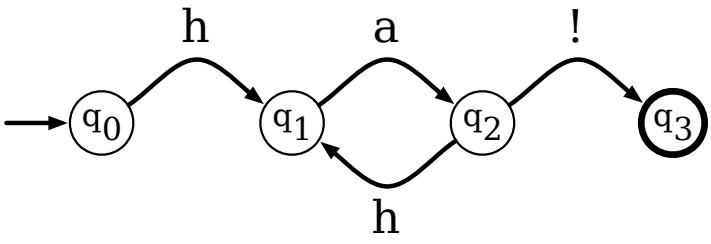
- Endliche Automaten können informell durch Zustandsdiagramme beschrieben werden.
  - akzeptierte Wörter entsprechen Pfaden zu Endzuständen



ha!
haha!
hahaha!
hahahaha!
. . .

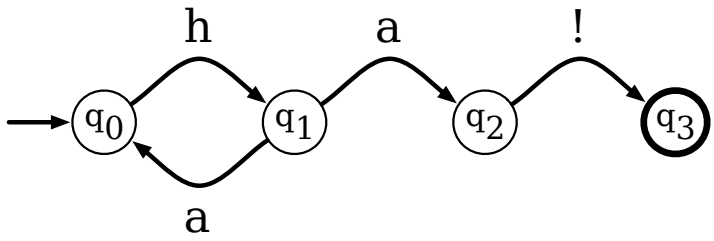
Endliche Automaten

- Deterministische endliche Automaten:
  - für jeden Zustand gibt es für jedes Symbol (Zeichen) genau einen Nachfolgezustand.
  - fehlende Kanten in Zustandsdiagrammen denken wir uns als Kanten in einen impliziten Nicht-Endzustand („toter Zustand“)



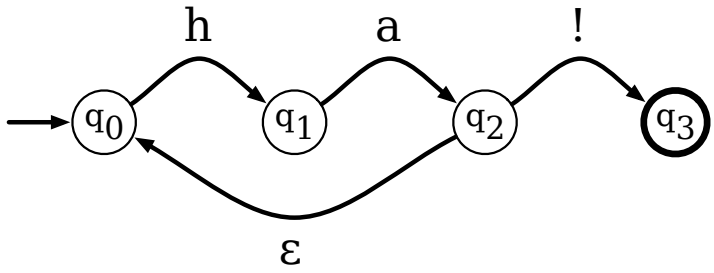
Endliche Automaten

- Nichtdeterministische Automaten können Zustände haben, die mehrere ausgehenden Kanten für einen Buchstaben haben.



Endliche Automaten

- In nichtdeterministischen Automaten sind die Kanten mit Wörtern (statt einzelner Buchstaben) etikettiert.
- Insbesondere sind ε-Übergänge erlaubt, die keine Eingabe konsumieren (ε = leeres Wort).



Alphabet & Wort

- Ein Alphabet Σ ist eine endliche, nicht-leere Menge von Symbolen.
- Ein Wort $w \in \Sigma^*$ über dem Alphabet Σ ist eine endliche, möglicherweise leere Kette von Symbolen aus Σ.
- Die Länge $|w|$ eines Wortes w ist die Anzahl der verketteten Symbole von w.
- Das leere Wort ε ist das Wort mit Wortlänge 0 ($|\varepsilon|=0$).

Sprachen

- Ein Sprache über einem Alphabet Σ ist eine Menge von Worten über Σ.
  - typischerweise sind Sprachen unendlich
- Einige besondere Sprachen:
  - Die leere Wortmenge $\varnothing$ heißt die „leere Sprache“
  - Die Menge Σ^* umfasst alle Worte über Σ (incl. ε)
  - Die Menge Σ^+ umfasst alle Worte über Σ ohne ε

Deterministische Automaten

- Deterministischer endlicher Automat: $\langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$
  - Q ist eine endliche, nicht-leere Menge von Zuständen
  - Σ ist ein endliches Alphabet
    - $Q \cap \Sigma = \emptyset$
  - δ ist eine Überführungsfunktion: $Q \times \Sigma \rightarrow Q$
  - q_0 ist ein Startzustand
  - F ist eine Menge von Endzuständen

Deterministische Automaten

- Konfigurationen: $Q \times \Sigma^*$
  - aktueller Zustand + noch zu lesende Eingabe
- Transitionen: $\langle q, w \rangle \vdash \langle q', w' \rangle$
  - gdw. $w = aw'$ und $q' = \delta(q, a)$
- Reflexiv-transitive Hülle: $\vdash^*$
- Ein deterministischer Automat $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ akzeptiert eine Eingabekette $w = a_1, \ldots, a_n$
  - gwd. $\langle q_0, w \rangle \vdash^* \langle q_f, \varepsilon \rangle$, $q_f \in F$
- Akzeptierte Sprache = Menge der akzeptierten Ketten.

DFA in Python

- Wie repräsentieren wir Zustände?
  - Hier: beliebige Python-Werte, die als Schlüssel von Wörterbüchern erlaubt sind (int, string, …)
- Wie wird die Übergangsfunktion extern repräsentiert?
  - Hier: als Liste von Tripeln (Zustand, Zeichen, Zustand)
- Wie wird die Übergangsfunktion intern repräsentiert?
  - Hier: ein Wörterbuch, das Paare (tuple) von Zuständen und Zeichen auf Zustände abbildet.

DFA in Python

```
class DFA:
   def __init__(self, initial, transitions, final):
      self.initial = initial
      self.final = set(final)
      self.trns = dict()
      for (src, char, tgt) in transitions:
         self.trns[src, char] = tgt
   def recognize(self, strng):
      ...
```

DFA in Python

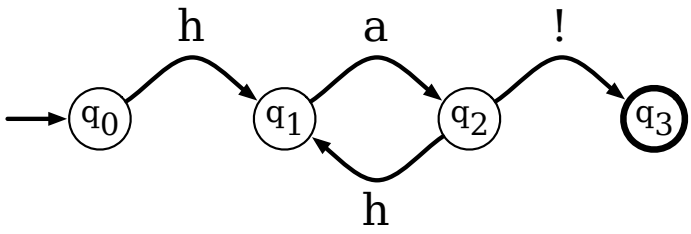
- Offensichtlicher Algorithmus zum Erkennen:
  - Eine Zustandsvariable (`state`) speichert den aktuellen Zustand
    - initial wird `state` auf den Startzustand gesetzt
  - Lies nacheinander einzelne Zeichen von der Eingabe und aktualisiere `state` entsprechend
  - Wenn die Eingabe komplett abgearbeitet wurde: prüfe, ob `state` ein Endzustand ist

DFA in Python

```
class DFA:
   ...
   def recognize(self, strng):
      state = self.initial
      try:
         for char in strng:
            state = self.trns[state, char]
      except KeyError: # impliziter toter Zustand
         return False
      return state in self.final
```

Lachmaschine

```
m = DFA(0, [(0,'h',1), (1,'a',2), (2,'h',1), (2,'!',3)], [3])
m.recognize('haha!')
⇒ True
m.recognize('hah!')
⇒ False
```



(Lewis & Papadimitriou, 1981)

Nicht-deterministische Automaten

- Nicht-deterministischer Automat: $\langle Q, \Sigma, \Delta, q_0, F \rangle$
  - Q ist eine endliche, nicht-leere Menge von Zuständen
  - Σ ist ein endliches Alphabet
    - $Q \cap \Sigma = \emptyset$
  - Δ ist eine Überführungsrelation: $Q \times \Sigma^* \times Q$
  - q_0 ist ein Startzustand
  - F ist eine Menge von Endzuständen
- Transitionen: $\langle q, w \rangle \vdash \langle q', w' \rangle$
  - gdw. $w = uw'$ ($u \in \Sigma^*$) und $\langle q, u, q' \rangle \in \Delta$

NFA in Python

- Die Übergangsfunktion wird als Wörterbuch realisiert, dass Zustände auf Mengen von String x Zustand Paaren abbildet.
- Algorithmus zum Erkennen kann als rekursive Funktion realisiert werden:
  - Iteriere über alle möglichen Nachfolgezustände für den aktuellen Zustand
  - Brich die Schleife ab und liefere True, wenn der Rest der Eingabe rekursiv erkannt werden kann
  - Nach dem Ende der Schleife: liefere False

NFA in Python (erste Version)

```
class NFA:
   def __init__(self, initial, transitions, final):
      self.initial = initial
      self.final = set(final)
      self.trns = dict()
      for (src, strng, tgt) in transitions:
         try:
            self.trns[src].add((strng, tgt))
         except KeyError:
            self.trns[src] = set([(strng, tgt)])
   ...
```

NFA in Python (erste Version)

```
class NFA:
   ...
   def recognize(self, strng):
      return self._recognize(self.initial, strng)
   def _recognize(self, state, strng):
      if strng == '' and state in self.final:
         return True
      for (prefix, _state) in self.trns[state]:
         prfxlen = len(prefix)
         if prefix == strng[:prfxlen]:
            if self._recognize(_state, strng[prfxlen:]):
               return True
      return False
```


Probleme & sinnvolle Einschränkungen

- Das Programm terminiert nicht notwendigerweise.
  - ε-Übergänge
- Ineffiziente Suche nach passenden Folgezuständen
  - Iteration über alle Folgezustände
- Sinnvolle Einschränkung:
  - Nur Übergänge $(q, w, q') \in \Delta$ mit $|w| = 1$ zulassen
  - ⇒ ε-Abschluss („ε-closure“):
- ε-closure: alle über ε-Übergänge erreichbaren Zustände

NFA in Python (zweite Version)

- Interne Repräsentation der Übergangsfunktion ähnlich wie bei deterministischen Automaten:
  - Ein Wörterbuch, das Paare von Zuständen und Zeichen auf Mengen von Nachfolgezuständen abbildet.
  - Hier außerdem: Benutzung von verschachtelten “default dictionaries”

```
from collections import defaultdict

s = [('yellow', 1), ('blue', 2), ('yellow', 3),  ('red', 1)]
d = defaultdict(list)

for k, v in s:
   d[k].append(v)
```

- *läuft ohne KeyError!*
- *nicht vorhandener Eintrag ➪ list()*

NFA in Python (zweite Version)

```
from collections import defaultdict

class NFA:
   def __init__(self, initial, trns, final):
      self.initial = initial
      self.final = set(final)
      self.trns = defaultdict(lambda: defaultdict(set))
      for (src, char, tgt) in trns:
            self.trns[src][char].add(tgt)


...
```

NFA in Python (zweite Version)

```
class NFA:
    ...
    def closure(self, state):
        reachable = set([state])
        agenda = [state]
        while agenda:
            state = agenda.pop()
            for other in self.trns.get(state, {}).get('', []):
                reachable.add(other)
                agenda.append(other)
        return reachable
    ...
```


NFA in Python (zweite Version)

```
class NFA:
    ...
    def recognize(self, strng):
        return self._recognize(self.initial, strng)

    def _recognize(self, state, strng):
        if strng == '':
            return self.closure(state) & self.final
        for e in self.closure(state):
            for s in self.trns.get(e, {}).get(strng[0], []):
                if self._recognize(s, strng[1:]):
                    return True
        return False
```

Abschlusseigenschaften

- Die Klasse der von endlichen Automaten akzeptierten Sprachen ist abgeschlossen unter:
  - Vereinigung
  - Konkatenation
  - Kleene Stern
  - Komplement
  - Schnitt

Abschlusseigenschaften: Konkatenation

- Seien L_1, L_2 zwei reguläre Sprachen
  - $M_1 = \langle Q_1, \Sigma, \Delta_1, s_1, F_1 \rangle$, $L(M_1) = L_1$
  - $M_2 = \langle Q_2, \Sigma, \Delta_2, s_2, F_2 \rangle$, $L(M_2) = L_2$
- Dann akzeptiert $M = \langle Q, \Sigma, \Delta, s_1, F_2 \rangle$ die Sprache $L_1 \circ L_2$:
  - $Q = Q_1 \cup Q_2$
  - $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup (F_1 \times \{\varepsilon\} \times \{s_2\})$

Abschlusseigenschaften: Vereinigung

- Seien L_1, L_2 zwei reguläre Sprachen
  - $M_1 = \langle Q_1, \Sigma, \Delta_1, s_1, F_1 \rangle$, $L(M_1) = L_1$
  - $M_2 = \langle Q_2, \Sigma, \Delta_2, s_2, F_2 \rangle$, $L(M_2) = L_1$
- Dann akzeptiert $M = (Q, \Sigma, \Delta, s, F)$ die Sprache $L_1 \cup L_2$:
  - $Q = Q_1 \cup Q_2 \cup \{s\}$
    - $s \notin Q_1 \cup Q_2$
  - $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \{\langle s, \varepsilon, s_1 \rangle, \langle s, \varepsilon, s_2 \rangle\}$
  - $F = F_1 \cup F_2$

Abschlusseigenschaften: Kleene Stern

- Seien L_1 eine reguläre Sprachen
  - $M_1 = \langle Q_1, \Sigma, \Delta_1, s_1, F_1 \rangle$, $L(M_1) = L_1$
- Dann akzeptiert $M = \langle Q, \Sigma, \Delta, s, F \rangle$ die Sprache L_1^*:
  - $Q = Q_1 \cup \{s\}$
    - $s \notin Q_1$
  - $F = F_1 \cup \{s\}$
  - $\Delta = \Delta_1 \cup (F_1 \times \{\varepsilon\} \times \{s_1\})$

NFA in Python (dritte Version)

- In Python bietet sich als Alternative (zur 2. Version) eine Objektorientierte Implementierung an:
  - Zustände werden als Objekte realisiert
  - Nachfolgezustände werden direkt als Attribute im Zustandsobjekt gespeichert

NFA in Python (dritte Version)

```
class State(dict):
   def __hash__(self):
      # erlaube State als Schlüssel eines dict
      return id(self)

   def add(self, char, state):
      try:
         self[char].add(state)
      except KeyError:
         self[char] = set([state])
   ...
```

NFA in Python (dritte Version)

```
class State(dict):
   ...
   def recognize(self, strng, final):
      if strng == '':
         return any(s in final for s in self.closure())
      for epsi in self.closure():
         for state in epsi.get(strng[0], []):
            if state.recognize(strng[1:], final):
               return True
      return False
   def closure(self):
      return <per ε-Transition erreichbare Zustände>
```


NFA in Python (dritte Version)

```
class NFA:
   def __init__(self, initial, final):
      self.initial = initial
      self.final = final
   def recognize(self, string):
      return self.initial.recognize(string, self.final)
   @staticmethod
   def singleton(char):
      final = set([State()])
      return NFA(State([(char, final)]), final)
   def concat(self, other):
      for final in self.final:
         final.add('', other.initial)
      return NFA(self.initial, other.final)
```

NFA in Python (dritte Version)

```
class NFA:
   ...
   def union(self, other):
      initial = State()
      initial.add('', self.initial)
      initial.add('', other.initial)
      return NFA(initial, self.final | other.final)
   def star(self):
      initial = State()
      initial.add('', self.initial)
      for final in self.final:
         final.add('', initial)
      return NFA(initial, set([initial]))
```


Lachmaschine

```
m = NFA.singleton('h').\
        concat(NFA.singleton('a')).\
        star().\
        concat(NFA.singleton('!'))
m.rcgnz('haha!')
⇒ True
m.rcgnz('hah!')
⇒ False
```