Mathematische Grundlagen III

Probabilistische kontextfreie Grammatiken

Garance PARIS

14. Juni 2011

Ambiguität beim Parsing

- Wörter können verschiedene Bedeutungen haben und mehr als einer Wortkategorien angehören
- Verschiedene Wortkategorien führen zu verschiedenen Satzstrukturen
- Außerdem gibt es strukturelle Ambiguitäten, die nicht aus dem Lexikon stammen

Lösung: Statistik hinzuziehen

- Zuerst mit PoS-Tagging für jedes Wort die beste Kategorie bestimmen
- Dann den besten Parsebaum für den Satz bestimmen:

$$\underset{t}{\operatorname{argmax}}\, P(t|\mathit{Satz}, \mathit{Grammatik})$$

Weiterer Vorteil

- Geeignet für die kognitive Modellierung menschlichen Verhaltens

Probabilistische kontextfreie Grammatiken (PCFGs)

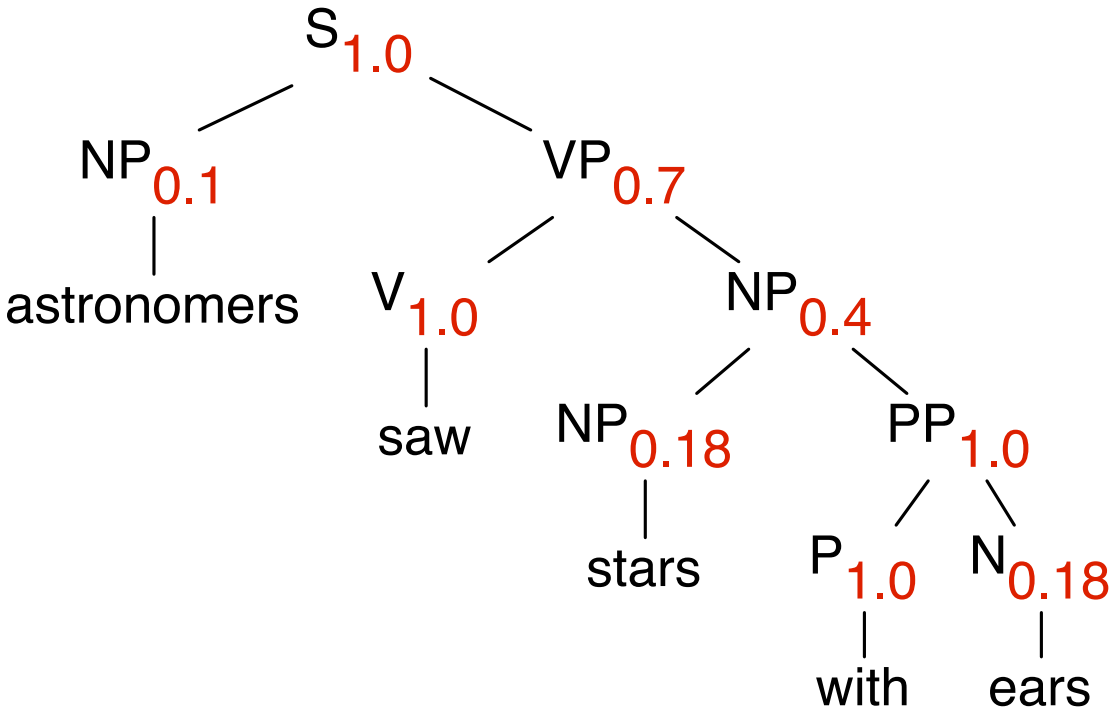
- Eine PCFG ist eine kontextfreie Grammatik, in der jede Regel mit einer Wahrscheinlichkeit versehen ist
- Die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller Regeln mit dem selben Symbol auf der *linken* Seite muss eins betragen
- Beispiel:

S	→	NP VP	1.0
VP	→	V NP	0.7
VP	→	VP PP	0.3
NP	→	NP PP	0.4
PP	→	P NP	1.0

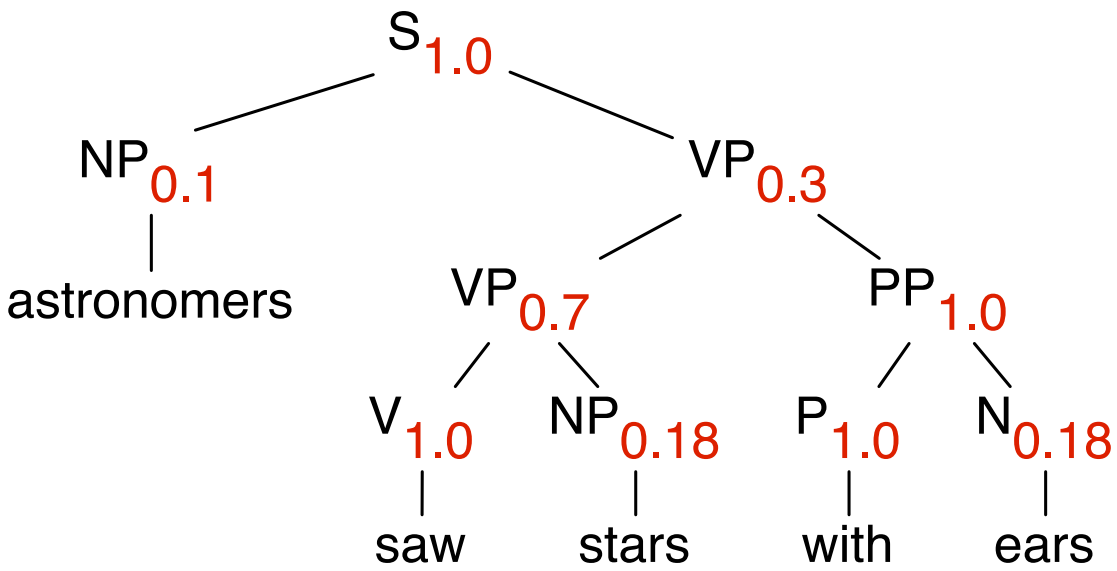
NP	→	astronomers	0.1
NP	→	telescopes	0.1
NP	→	saw	0.04
NP	→	stars	0.18
NP	→	ears	0.18
P	→	with	1.0
V	→	saw	1.0

Wahrscheinlichkeit eines Parsebaums

Die Wahrscheinlichkeit eines Parses ist das Produkt der Wahrscheinlichkeiten der Regeln, die während des Parsens angewandt werden



$$P(t1) = 1.0 * 0.18 * 1.0 * 0.18 * 0.4 * 1.0 * 0.7 * 0.1 * 1.0$$
$$= 0.009072$$



$$\begin{aligned} P(t2) &= 1.0 * 0.1 * 0.3 * 0.7 * 1.0 * 0.18 * 1.0 * 1.0 * 0.18 \\ &= 0.0006804 \end{aligned}$$

Wahrscheinlichkeit eines Satzes

Die Wahrscheinlichkeit eines Satzes ist die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller Parsebäume:

$P(Satz) = P(t1) + P(t2) = 0.0015876$

Formell gesehen

Wahrscheinlichkeit eines Parsebaums:

$$P(t, Satz) = \prod_{n \in t} P(r(n))$$

Wahrscheinlichkeit eines Satzes:

$$P(Satz) = \sum_{t} P(t, Satz)$$

t: Parsebaum für den Satz
n: Knoten im Baum
r: Regel, die bei der Expansion eines Knotes angewandt wird

Annahmen bei PCFGs

- Positionsunabhängigkeit: Die Wahrscheinlichkeit eines Teilbaums ist unabhängig davon, wo im Satz die entsprechende Wortfolge vorkommt (vgl. Zeitunabhängigkeit bei HMMs)
- Kontextunabhängigkeit: Die Wahrscheinlichkeit eines Teilbaums ist unabhängig von Wörtern, die er nicht dominiert
- Vorfahrenunabhängigkeit: Die Wahrscheinlichkeit eines Teilbaums ist unabhängig von Vorgängerknoten im Baum

Zu beantwortenden Fragen

- Was ist die Wahrscheinlichkeit eines Satzes gegeben eine Grammatik?
- Was ist der wahrscheinlichste Parsebaum für einen Satz?
- Parameterschätzung: Wie ordnen wir den Regeln Wahrscheinlichkeiten zu?

Algorithmen dazu

- Wahrscheinlichkeit eines Satzes:
  Inside- und Outside-Algorithmen
- Den wahrscheinlichsten Parsebaum bestimmen:
  Viterbi-Algorithmus
- Den Regeln Wahrscheinlichkeiten zuweisen:
  Inside-Outside Algorithm

Parallel mit HMMs

- Diese Algorithmen sind ähnlich den Algorithmen,
  die beim PoS-Tagging eingesetzt werden
- Inside- und Outside-Wahrscheinlichkeiten entsprechen
  Forward- und Backward-Wahrscheinlichkeiten

Chomsky Normalform

Die Algorithmen gelten im Prinzip nur für Grammatiken in Chomsky-Normalform, d. h. Grammatiken, in denen

- alle Grammatikregeln binär sind,
  $X \to Y\,Z$
- und nur lexikalische Regeln unär
  $X \to w$

  (X, Y, Z: Nicht-Terminale, w: Wort)

Alle sonstige Grammatiken können aber in eine Grammatik in Chomsky-Normalform umgeformt werden

Zu schätzenden Parameter

Wenn die Grammatik in Chomsky-Normalform ist, sind die zu schätzenden Parameter:

- Eine Matrix mit n^3 Elementen bei n Nicht-Terminalen der Form $X \to Y\,Z$
- $n \cdot V$ Parameter bei V Terminalen der Form $X \to w$

Außerdem muss gelten:

$$\sum_{Y,Z} P(X \to Y\,Z) + \sum_{w} P(X \to w) = 1$$

Erwerb der Regelwahrscheinlichkeiten

Zwei Möglichkeiten:

- Automatischer Erwerb:
  Es wird versucht, die Parameter zu finden, bei denen ein gewisses Training-Korpus am wahrscheinlichsten ist
  - Erfordert eine gute Grammatik im Voraus, um die Anzahl der Kombinationen einzuschränken
  - Es existieren viele lokale Maxima
  - Funktionniert selten gut
- Externe Wahrscheinlichkeiten verwenden:
  z. B. Wahrscheinlichkeiten aus einer Baumbank ablesen
  - Setzt Einschränkungen auf die Sprachen und Korpora, die wir zum Trainieren verwenden können
  - Sparse-Data Probleme

Probabilistisches Parsing

Probleme mit PCFGs

- Kontext spielt keine Rolle, aber wir wissen, dass Personalpronomen in Subjektposition häufiger als in Objektposition sind
  (*"NP* $\rightarrow$ *Pronoun"* müsste zwei unterschiedliche, kontextabhängige Wahrscheinlichkeiten haben)
- Lexikalisches Wissen (Subkategorisierung, Selektionseinschränkungen) spielt keine Rolle
- Globale strukturelle Präferenzen haben keine Auswirkung (z.B. in Bezug auf die Anbindung von PPs, Relativsätze, Adverbien, usw.)

Mögliche Lösungen

- Lexikalisierung der Nicht-Terminalen (s.u.)
- Parentisierung:
  Ähnliches Prozess, nur hier wird ein bestimmter Vorgängerknoten zur Vorbedingung einer Regel gemacht
- Weitere “Tricks”:
  Subkategorisierung einführen, Traces, Interpunktion, Clustering, usw.

Eine Grammatik lexikalisieren

Lexikalisierung der erste VP-Regel, VP $\rightarrow$ V NP (0.7):

$$
\begin{array}{lcll}
\mathrm{VP}_{saw} & \rightarrow & \mathrm{V}_{saw}\ \mathrm{NP}_{astronomers} & 0.1 \\
\mathrm{VP}_{saw} & \rightarrow & \mathrm{V}_{saw}\ \mathrm{NP}_{ears} & 0.15 \\
\mathrm{VP}_{saw} & \rightarrow & \mathrm{V}_{saw}\ \mathrm{NP}_{saw} & 0.05 \\
\mathrm{VP}_{saw} & \rightarrow & \mathrm{V}_{saw}\ \mathrm{NP}_{stars} & 0.3 \\
\mathrm{VP}_{saw} & \rightarrow & \mathrm{V}_{saw}\ \mathrm{NP}_{telescopes} & 0.1
\end{array}
$$

- Aus einer Regel werden fünf!
- Zuviele Parameter müssen geschätzt werden (Sparse-Data)
- Typischerweise wird nur den lexikalischen Kopf als Bedingung genommen:
  $\mathrm{VP}_{saw} \rightarrow \mathrm{V}_{saw}\ \mathrm{NP}\ 0.7$

Algorithmen

Motivierung

- Der naive Algorithmus, um die Wahrscheinlichkeit eines Satzes zu berechnen, ist exponential (wie bei HMMs)
- Lösung:
  Teilergebnisse (Wahrscheinlichkeit einzelner Wortketten) speichern anstatt sie immer wieder neu zu berechnen

Algorithmen

Motivierung

- Der naive Algorithmus, um die Wahrscheinlichkeit eines Satzes zu berechnen, ist exponential (wie bei HMMs)
- Lösung:
  Teilergebnisse (Wahrscheinlichkeit einzelner Wortketten) speichern anstatt sie immer wieder neu zu berechnen

Speichervariablen

$\beta_X(p, q)$: Wahrscheinlichkeit, dass die Nicht-Terminale X eine Wortkette mit Anfangspunkt p und Endpunkt q überspannt

(Für die Speichervariablen wählen wir den Buchstaben Beta, weil sie denen im Backward-Algorithmus beim PoS-Tagging ähnlich sind)

Algorithmen

Der Inside-Algorithmus

Induktionsanfang

Die Wahrscheinlichkeit des Vor-Terminal-Baums mit Mutter X und Tochter p ist die Wahrscheinlichkeit der entsprechenden Regel:

$$\beta_X(p, p) = P(X \to p)$$

Algorithmen

Der Inside-Algorithmus

Induktionsanfang

Die Wahrscheinlichkeit des Vor-Terminal-Baums mit Mutter X und Tochter p ist die Wahrscheinlichkeit der entsprechenden Regel:

$$\beta_X(p,p) = P(X \to p)$$

Induktionsschritt (Bottom-Up)

Die Wahrscheinlichkeit eines Subbaums ist die Summe über alle möglichen Regelanwendungen des Produktes von Regelwahrscheinlichkeit und Wahrscheinlichkeiten der jeweiligen Unterteile

$$\beta_X(p,r) = \sum_{Y,Z} \sum_{q} P(X \to YZ)\ \beta_Y(p,q)\ \beta_Z(q+1,r)$$

Inside

Beispiel

Eingabesatz:

$$\text{astronomers}_1 \ \text{saw}_2 \ \text{stars}_3 \ \text{with}_4 \ \text{ears}_5$$

Induktionsanfang

$$\begin{aligned}
\beta_{NP}(1,1) &= P(NP \to \text{astronomers}) = 0.1 \\
\beta_{V}\ (2,2) &= P(V \to \text{saw}) = 1.0 \\
\beta_{NP}(2,2) &= P(NP \to \text{saw}) = 0.04 \\
\beta_{NP}(3,3) &= P(NP \to \text{stars}) = 0.18 \\
\beta_{P}\ (4,4) &= P(P \to \text{with}) = 1.0 \\
\beta_{NP}(5,5) &= P(NP \to \text{ears}) = 0.18
\end{aligned}$$

Inside

Beispiel, Teil 2

Induktionsschritt

$$
\begin{aligned}
\beta_{VP}(2,3) &= P(VP \to V\ NP) \quad \beta_V(2,2) \quad \beta_{NP}(3,3) \\
&= 0.126 \\
\beta_{PP}(4,5) &= P(PP \to P\ NP) \quad \beta_P(4,4) \quad \beta_{NP}(5,5) \\
&= 0.18 \\
\beta_{NP}(3,5) &= P(NP \to NP\ PP)\ \beta_{NP}(3,3)\ \beta_{PP}(4,5) \\
&= 0.01296 \\
\beta_{VP}(2,5) &= P(VP \to V\ NP) \quad \beta_V(2,2) \quad \beta_{NP}(3,5) \\
&+ P(VP \to VP\ PP)\ \beta_{VP}(2,3)\ \beta_{PP}(4,5) \\
&= 0.009072 + 0.006804 = 0.015876 \\
\beta_S\ (1,5) &= P(S \to NP\ VP) \quad \beta_{NP}(1,1)\ \beta_{VP}(2,5) \\
&= 0.0015876
\end{aligned}
$$

Algorithmen

Der Viterbi-Algorithmus

- Wie bei HMMs gibt's einen Inside-ähnlichen Algorithmus, der den wahrscheilichsten Parsebaum eines Satzes berechnet: Viterbi
- Es werden Speichervariablen eingeführt, die die Wahrscheinlichkeit des besten Unterbaums speichern: $\delta_j(p, q)$
- Außerdem werden Rückverfolgungsvariablen eingesetzt, die ψs, um sich zu merken, welche Regel zum besten Teilbaum führte:

  $\psi_X(p, q) = (Y, Z, r)$ speichert die Anwendung von $X \to YZ$, wobei die Unterbäume nach r getrennt werden

Der Viterbi-Algorithmus

Induktionsanfang

Wie bei Inside: $\delta_X(p,p) = P(X \to p)$

Induktionsschritt

$$\delta_X(p,r) = \max_{Y,Z,q} P(X \to YZ)\ \delta_Y(p,q)\ \delta_Z(q+1,r)$$

Falls es kein eindeutiges Maximum gibt, findet eine zufällige Auswahl statt

Verfolgungsvariable speichern:

$$\psi_X(p,r) = \operatorname*{argmax}_{Y,Z,q} P(X \to YZ)\ \delta_Y(p,q)\ \delta_Y(q+1,r)$$

Der Viterbi-Algorithmus

Zurückverfolgung des Pfades

Den wahrscheinlichsten Baum kann wie folgt gefunden werden:

1. Die Wurzel des wahrscheinlichsten Baums ist $\psi_X(1, n)$ (n: Länge der Wortkette)
2. Sei $\psi_X(p, r) = (Y, Z, q)$ die Verfolgungsvariable von X
3. Die linke und rechte Tochtern von X sind:

$$\begin{aligned} \text{left}(X) &= Y_{p,q} \\ \text{right}(X) &= Z_{q+1,r} \end{aligned}$$

Inside

Beispiel

Induktionsanfang

$$
\begin{aligned}
\delta_{NP}(1,1) &= P(NP \rightarrow \text{astronomers}) = 0.1 \\
\delta_{V}\ (2,2) &= P(V \rightarrow \text{saw}) = 1.0 \\
\delta_{NP}(2,2) &= P(NP \rightarrow \text{saw}) = 0.04 \\
\delta_{NP}(3,3) &= P(NP \rightarrow \text{stars}) = 0.18 \\
\delta_{P}\ (4,4) &= P(P \rightarrow \text{with}) = 1.0 \\
\delta_{NP}(5,5) &= P(NP \rightarrow \text{ears}) = 0.18
\end{aligned}
$$

Induktionsschritt

$$
\begin{aligned}
\delta_{VP}\,(2,3) &= P(VP \rightarrow V\ NP)\ \delta_{V}(2,2)\ \delta_{NP}(3,3) \\
&= 0.126 \\
\psi_{VP}(2,3) &= (V, NP, 2)
\end{aligned}
$$

Inside

Induktionsschritt, Teil 2

$$
\begin{aligned}
\delta_{PP}\,(4,5) &= P(PP \to P\ NP) \qquad \delta_P(4,4)\ \ \delta_{NP}(5,5) \\
&= 0.18 \\
\psi_{PP}(4,5) &= (P, NP, 4) \\
\delta_{NP}\,(3,5) &= P(NP \to NP\ PP) \qquad \delta_{NP}(3,3)\ \delta_{PP}(4,5) \\
&= 0.01296 \\
\psi_{NP}(3,5) &= (NP, PP, 3) \\
\delta_{VP}\,(2,5) &= max(P(VP \to V\ NP)\ \delta_V(2,2)\ \ \delta_{NP}(3,5), \\
&\qquad (P(VP \to VP\ PP) \qquad \delta_{VP}(2,3)\ \delta_{PP}(4,5)) \\
&= max(0.009072, 0.006804) = 0.009072 \\
\psi_{VP}(2,5) &= (V, NP, 2) \\
\delta_S\ \ (1,5) &= P(S \to NP\ VP) \qquad \delta_{NP}(1,1)\ \delta_{VP}(2,5) \\
&= 0.0015876 \\
\psi_S\ \ (1,5) &= (NP, VP, 1)
\end{aligned}
$$

Zurückverfolgung des Pfades

$$
\begin{aligned}
\psi_S(1,5) &= (NP, VP, 1) \\
\text{left}(S) &= NP_{1,1} \\
\text{right}(S) &= VP_{(1+1),5} = VP_{2,5} \\
\psi_{VP}(2,5) &= (V, NP, 2) \\
\text{left}(VP) &= V_{2,2} \\
\text{right}(VP) &= NP_{3,5} \\
\psi_{NP}(3,5) &= (NP, PP, 3) \\
\text{left}(NP) &= NP_{3,3} \\
\text{right}(NP) &= PP_{4,5} \\
\psi_{PP}(4,5) &= (P, NP, 4) \\
\text{left}(PP) &= P_{4,4} \\
\text{right}(PP) &= NP_{5,5}
\end{aligned}
$$