Prädikatenlogik 1. Stufe mit Identität (PL_1)

Formalisieren in PL_1 (Informelle Semantik)

Wörterbuch:	
Du – u ist dick	Fu – u ist eine Frau
Mu – u ist ein Mann	Hu – u ist ein Mensch
Pu – u ist eine Person	Gu – u ist Gott
Su – u ist sterblich	Vu – u ist vergänglich
Luv – u liebt v	
g – Gott	h – Hans
m – Maria	s – Sokrates

(1) *Hans ist ein Mann* Mh

(2) *Maria ist kein Mann* ~Mm

(3) *Wenn Sokrates ein Mensch ist, dann ist er sterblich* Hs ⊃ Ss

(4) *Maria liebt Hans aber nicht sich selbst* Lmh & ~Lmm

(5) *Alles / Jedes Ding ist vergänglich* (∀x)Vx

(6) *Nicht alles ist sterblich, Es gibt etwas Unsterbliches* ~(∀x)Sx
oder äquivalent: (∃x)~Sx

(7) *Es gibt Frauen* (∃x)Fx

(8) *Es gibt keinen Gott, Gott existiert nicht* ~(∃x)Gx
oder äquivalent: (∀x)~Gx

(9) *Nichts ist unvergänglich* ~(∃x)~Vx

(10) *Nicht alles ist unsterblich* ~(∀x)~Sx

(11) *Alle Menschen sind sterblich, Jeder Mensch ist sterblich* (∀x)[Hx ⊃ Sx]

(12) *Einige Menschen sind Frauen* (∃x)[Hx & Fx]

(13) *Einige Männer sind dick und einige sind nicht dick* (∃x)[Mx & Dx] & (∃x)[Mx & ~Dx]

(14) *Kein Mensch ist sowohl Frau als auch Mann* (∀x)[Hx ⊃ ~(Fx & Mx)]

(15) *Gott liebt jeden / alle* (∀x)[Px ⊃ Lgx]

(16) *Alle lieben Gott* (∀x)[Px ⊃ Lxg]

(17) *Gott liebt alles* (∀x)Lgx

(18) *Wenn Hans eine Frau liebt, dann Maria* (∃x)[Fx & Lhx] ⊃ Lhm

Für die folgenden Formalisierungen sei das „Universum“ (Diskurswelt) die Menge aller Personen.

(19) *Jeder liebt jeden* (∀x)(∀y)Lxy

(20) *Jeder wird von jedem geliebt* (∀y)(∀x)Lxy

(21) *Alle lieben jemanden* (∀x)(∃y)Lxy

(22) *Jemand wird von allen geliebt* (∃y)(∀x)Lxy

(23) *Jeder Mann liebt eine Frau*
1. Lesart (∀x)[Mx ⊃ (∃y)(Fy & Lxy)]
2. Lesart (∃y)[Fy & (∀x)(Mx 3 Lxy)]

(24) *Jemand liebt jemand andern*
(∃x)(∃y)(~x=y & Lxy)

(25) *Hans liebt nur sich selbst* (∀x)(Lhx ⊃ x=h)

Formale Syntax der PL_1

Morphologie

Eine Morphologie M für PL_1 ist eine Struktur, die aus folgenden Teilen besteht:

1. Eine unendliche Menge $V_M=\{x, y, z, \ldots\}$ von *Individuenvariablen*.
2. Eine unendliche Menge $IP_M=\{u, v, w, \ldots\}$ von *Individuenparametern*.
3. Eine Menge $C_M=\{a, b, c, \ldots\}$ von Individuenkonstanten.
4. Für jedes $i \geq 0$ eine Menge $P^i_M=\{P^i, Q^i, R^i, \ldots\}$ von i-stelligen Prädikatenparametern.

   Üblicherweise wird das Superskript weggelassen, da sich die Stelligkeit eines Prädikatenparameters aus dem Kontext ergibt. Ein 0-stelliger Prädikatenparameter ist ein Satzparameter.

Die in 3. und 4. spezifizierten Mengen können auch leer sein.

Terme

Die Menge T_M der Terme einer Morphologie M ist $C_M \cup IP_M$. Wir verwenden s, t als Metavariablen für Terme.

Formeln

Die Menge F_M der Formeln einer Morphologie M für PL_1 wird durch folgende Regeln definiert:

atomare Formeln:

1. Wenn $s, t \in T_M$ ist, dann ist $s = t \in F_M$.
2. Wenn $P \in P^0_M$, dann ist $P \in F_M$.
3. Wenn $P \in P^n_M$, wobei $n > 0$, und $t_1, \ldots, t_n \in T_M$, dann ist $Pt_1 \ldots t_n \in F_M$.

wahrheitsfunktional komplexe Formeln:

4. Wenn $A \in F_M$, dann ist $\sim A \in F_M$.

5. Wenn $A, B \in F_M$, dann ist $(A \& B) \in F_M$.
6. Wenn $A, B \in F_M$, dann ist $(A \vee B) \in F_M$.
7. Wenn $A, B \in F_M$, dann ist $(A \supset B) \in F_M$.
8. Wenn $A, B \in F_M$, dann ist $(A \equiv B) \in F_M$.

generelle / quantifizierte Formeln:

9. Wenn $A \in F_M$,$x \in V_M$,und $u \in IP_M$, dann ist $(\forall x)A^x/_u \in F_M$. (universelle Formel)
10. Wenn $A \in F_M$, $x \in V_M$, und $u \in IP_M$, dann $(\exists x)A^x/_u \in F_M$. (existentielle Formel)

    wobei $A^x/_u$ das Resultat der simultanen Ersetzung aller Vorkommen von *u* in *A* durch *x* ist.

    Wir nennen (∀x) und (∃x) den „All-" bzw. „Existenzquantor in der Variablen x".

Konnektive und Quantoren sind Operatoren. Der Hauptoperator einer Formel bestimmt, um was für eine Formel es sich handelt. Ist z.B. der Hauptoperator von *A* das Konnektiv &, so ist *A* eine Konjunktion; ist der Hauptoperator von *A* der Existenzquantor in der Variablen *x*, (∃x), so ist *A* eine existentielle Formel.

Def. (frei für ... in ...). Sei $A \in F_M$, $x \in V_M$, und $u \in IP_M$. Dann ist *u frei für x in A*, wenn kein Vorkommen von *u* in *A* in den Bereich (Skopus) eines Allquantors (∀x) oder eines Existenzquantors (∃x) fällt. Wir fordern, dass dies bei einer „Quantifizierung", d.h. bei einer Anwendung der Regeln 9 und 10, immer der Fall ist.

Def. (Quantifizierung). Sei $A \in F_M$. Dann ist *B* eine *universelle Quantifizierung von A*, wenn es ein $u \in IP_M$ und ein $x \in V_M$ gibt, mit *u* frei für *x* in *A*, und *B* die Formel $(\forall x)A^x/_u$ ist.

(Analog für existentielle Quantifizierung.)

Def. (Instanz). Sei *A* eine Quantifizierung, d.h. eine Formel der Form $(\forall x)B^x/_u$ oder $(\exists x)B^x/_u$, und sei $t \in T_M$. Dann ist jede Formel der Form $B^t/_u$ eine *Instanz von A*.

($B^t/_u$ ist wiederum das Resultat der simultanen Ersetzung aller Vorkommen von *u* in *B* durch *t*.)

Notationelle Varianten für Quantoren:

- (x) und (∃x) (z.B. in Thomason)
- ∧x und ∨x (oft in der deutschen Literatur)
- ∏x und ∑x (selten).

Formale Semantik der PL_1

Def. (Belegung). Sei *D* eine nicht-leere Menge und *M* eine Morphologie für PL_1. Eine *Belegung* einer Morphologie *M* für PL_1 über der Diskurswelt *D* ist eine Funktion *V* wie folgt:

1. Für jeden Term *t* von *M:*

   $V(t) \in D$

2. Für jeden 0-stelligen Prädikatenparameter (Satzparameter) *P* von *M:*

   $V(P) \in \{W, F\}$

3. Für jeden i-stelligen Prädikatenparameter Q (i > 1) von M:

   $V(Q) \subseteq D^i$

Def. (Variantenbelegung). Sei *V* eine Belegung einer Morphologie *M* für PL_1 über einer Diskurswelt *D* und sei $u \in IP_M$ und $d \in D$. Dann ist $V^d/_u$ eine Belegung wie *V*, mit dem möglichen Unterschied dass $V^d/_u$ an der Stelle *u* den Wert *d* zugewiesen bekommt. D.h.:

$V^d/_u(v) = d$, wenn $v = u$

$V^d/_u(v) = V(v)$, wenn $v \neq u$

(„Semantische Substitution“)

Semantische Werte von Formeln

Der semantische Wert von Formeln einer Morphologie M für PL1 wird nun rekursiv wie folgt bestimmt: Sei *V* eine Belegung einer Morphologie M für PL_1 über einer Diskurswelt *D* und sei *A* eine atomare Formel von *M*.

a) atomare Formeln: Falls *A* ein Satzparameter von *M* ist, dann ist der Wahrheitswert von *A* schon durch *V* bestimmt. Sonst gilt folgendes:

1. $V(Pt_1 \ldots t_n) = W$ gdw $\langle V(t_1), \ldots, V(t_n)\rangle \in V(P)$.
2. $V(s = t) = W$ gdw $V(s) = V(t)$.

b) komplexe Formeln: Der Wahrheitswert einer komplexen Formel von M wird gemäss folgender semantischer Regeln bestimmt:

3. $V(\sim A) = W$ gdw $V(A) = F$.
4. $V(A \,\&\, B) = W$ gdw $V(A)=W$ *und* $V(B) = W$.
5. $V(A \vee B) = W$ gdw $V(A)=W$ *oder* $V(B) = W$.
6. $V(A \supset B) = W$ gdw $V(A)=F$ *oder* $V(B)=W$.
7. $V(A \equiv B) = W$ gdw $V(A) = V(B)$.
8. $V((\forall x)Ax/u)=W$ gdw für alle $d \in D$, $V^d/_u(A) = W$.
9. $V((\exists x)Ax/u) = W$ gdw für mindestens ein $d \in D$, $V^d/_u(A) = W$.

Semantische Begriffe

Def. (erfüllbar). Eine Formel A von M ist *erfüllbar* wenn es eine nicht-leere Diskurswelt D und eine Belegung V von M über D gibt, so dass gilt: $V(A) = W$.

Def. (gültig). Eine Formel A von M ist gültig wenn für jede nicht- leere Diskurswelt D und jede Belegung V von M über D gilt: $V(A) = W$.

Def. (erfüllt simultan). Sei Γ eine Menge von Formeln einer Morphologie M von PL_1 und sei V eine Belegung von M über einer Diskurswelt D. Die Belegung *V erfüllt Γ simultan*, wenn V jede Formel in Γ erfüllt.

Man sagt in diesem Fall auch, dass V *ein Modell von Γ ist*. Üblich ist auch die Schreibweise: das Paar $\mathcal{M} = \langle D, V\rangle$ ist Modell von Γ.

Def. (simultan erfüllbar). Sei Γ eine Menge von Formeln einer Morphologie M für PL_1. Dann ist Γ *simultan erfüllbar*, wenn es eine nicht-leere Diskurswelt D und eine Belegung V von M über D gibt, die Γ simultan erfüllt.

Eine Menge von Formeln ist also simultan erfüllbar, wenn sie mindestens ein Modell hat.

Def. (impliziert). Sei Γ eine Menge von Formeln einer Morphologie M und sei A eine Formel von M. *Γ impliziert logisch A* (A folgt logisch aus Γ, $\Gamma \models$ A), wenn für jede nicht-leere Diskurswelt D und jede Belegung V von M über D, die Γ simultan erfüllt, gilt, dass V auch A erfüllt.

Eine Menge von Formeln Γ impliziert also logisch eine Formel A, wenn A in jedem Modell von Γ wahr ist.

Neben diesen absoluten Begriffen ist es nützlich, auch die entsprechenden, auf ein feste Diskurswelt D eingeschränkten Begriffe zu haben.

Def. (erfüllbar in D). Eine Formel A einer Morphologie M für PL_1 ist *erfüllbar in D*, wobei D eine nicht-leere Diskurswelt ist, wenn es eine Belegung V von M über D gibt so dass gilt: $V(A) = W$.

Analoge Definitionen kann man für Gültigkeit, simultane Erfüllbarkeit und logische Folgerung einführen.

Die absoluten und auf eine bestimmte Diskurswelt D relativierten Begriffe unterscheiden sich. So ist z.B. $(\exists x)(\exists y){\sim}x{=}y$ erfüllbar, aber nicht erfüllbar in $D = \{1\}$, und $(\forall x)(\forall y)((Px \,\&\, Py) \supset x{=}y)$ ist gültig in $D = \{1\}$ aber nicht gültig. Man sieht weiterhin leicht ein, dass $(\exists x)(\exists y){\sim}x{=}y$ nicht nur in $D = \{1\}$ nicht erfüllbar ist, sondern in jeder 1-elementigen

Diskurswelt. Es kommt also nur auf die Anzahl der Elemente einer Diskurswelt D an, und nicht auf ihre speziellen Elemente, ob eine Formel in ihr z.B. gültig ist.

Obwohl Belegungen unendliche Funktionen sind, kann man beweisen, dass für die Bewertung einer (Menge von) Formel(n) nur die Einschränkung der Belegung auf die Terme, Satz- und Prädikatenparameter einer Morphologie M, die in der (Menge von) Formel(n) tatsächlich vorkommen, relevant ist. Wir müssen also bei unseren Beispielen nur einen endlichen Ausschnitt einer Belegung betrachten.

Einige Erläuterungen zum Modellbegriff

Modelle einer Menge von Formeln Γ sind die Strukturen (Diskurswelten mit Eigenschaften und Relationen über deren Elementen), von denen Γ „handelt." Eine Menge von Formeln hat üblicherweise viele verschiedene Modelle. Durch Hinzunahme von zusätzlichen „Postulaten" werden die Modelle eingeschränkt. Wir können dies in folgendem semantischen Metatheorem zusammenfassen:

M1. Wenn $\Gamma' \subseteq \Gamma$, dann ist jedes Modell von Γ auch Modell von Γ'.

Je kleiner also eine Menge von Formeln ist, desto mehr Modelle hat sie. Die kleinste Menge ist die leere Menge, und für sie gilt, dass jede Struktur ein Modell dieser Menge ist. In einem Modell von Γ sind nicht nur die Formeln von Γ wahr, sondern auch alle logischen Folgerungen von Γ. Wir führen einen Begriff ein für die Menge der logischen Folgerungen einer Menge 5.

Def. (Konsequenzmenge). Sei Γ eine Menge von Formel von PL_1. Dann ist

$$Cn(\Gamma) = \{A : A \text{ ist Formel von } PL_1 \text{ und } \Gamma \vDash A\}.$$

Wir nennen $Cn(\Gamma)$ die Folgerungs- oder Konsequenzenmenge von Γ.

Die Konsequenzenmenge der leeren Menge, $Cn(\varnothing)$, ist also die Menge der gültigen Formeln. Eine gültige Formel ist also in jeder Struktur wahr, d.h. jede Struktur genügt den logischen Gesetzen.

Es gilt weiterhin, dass

M2. jedes Modell von Γ ist auch Modell von $Cn(\Gamma)$.

M3. wenn $A \in \Gamma$, dann $A \in Cn(\Gamma)$. ($\Gamma \subseteq Cn(\Gamma)$).

M4. wenn $\Gamma' \subseteq \Gamma$ dann $Cn(\Gamma') \subseteq Cn(\Gamma)$. („Monotonie")

M5. $Cn(Cn(\Gamma)) = Cn(\Gamma)$. („Idempotenz")

Das letzte Metatheorem besagt, dass durch Iteration der Cn-Funktion nichts mehr hinzugewonnen wird.

Ein System des Natürlichen Schliessens für PL_1 (S_{PL1})

Das System S_{PL1} ist eine Erweiterung des Systems für die AL. Es besteht aus den 12 Regeln für AL-Derivationen plus den folgenden 6 Regeln.

1. ∀I – *All-Introduktion* oder *All-Einführung,* auch: *All-Generalisierung.*
2. ∀E - *All-Eliminierung*, auch: *All-Spezifizierung* oder *All-Instantiierung*
3. ∃I - *Existenz-Introduktion* oder *Existenz- Einführung,* auch: *Existenz-General*
4. ∃E - *Existenz-Eliminierung,* auch: *Existenz- Instantiierung*
5. =I - *Identitäts-Introduktion* oder *Identitäts- Einführung*
6. =E - *Identitäts-Eliminierung*

Man sieht also, dass für jede der drei zusätzlichen logischen Konstanten der Prädikationlogik, ∀, ∃ und =, je eine Introduktions- und eine Eliminierungsregel gebraucht wird.

Folgende Konventionen werden verwendet für Metavariable:

x, y, z … für Individuenvariablen

s, t, t_1, … für Terme allgemein, d.h. für Individuenkonstanten und -parameter.

u, v, w … für Individuenparameter

A, B, C … für Formeln (Aussagen) allgemein

P, Q, R … für *i*-stellige Prädikatenparameter, i>0, (manchmal zur Verdeutlichung auch P^i, Q^i, …)

Wie üblich verstehen wir unter $A^t/_u$ bzw. $A^x/_u$ das Resultat der Ersetzung jedes Vorkommens des Individuenparameters *u* in der Formel *A* durch den Term *t* bzw. die Variable *x*.

Im folgenden also die neuen Regeln, für die im übrigen dieselben Beschränkungen gelten wie im System S_{AL}.

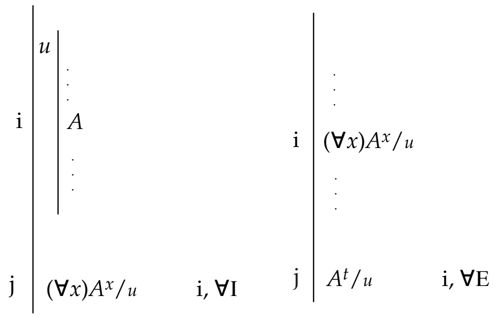
Regeln für den All-Quantor

∀-Introduktion (∀I). Wenn man in einer Derivation $\mathcal{D}$ zeigen kann, dass *A* für ein beliebiges Individuum *u* (hinter einer mit *u* beflaggten Linie), dann kann man zu einem späteren Zeitpunkt eine Allquantifizierung von A, (∀x)$A^x/_u$ in der Derivation $\mathcal{D}$ hinschreiben.

∀-Eliminierung (∀E). Wenn man in einer Derivation $\mathcal{D}$ eine universelle Formel (∀x)$A^x/_u$ hat, so kann man zu einem späteren Zeitpunkt eine beliebige

Instanz dieser Formel, $A^t/_u$, in der Derivation $\mathcal{D}$ hinschreiben.

Schematische Darstellung



Bemerkung zu ∀I: Die Formel *A* muss hinter einer „Barriere" mit der „Flagge" *u* gewonnen werden. Diese mit *u* beflaggte Barriere soll verhindern, dass durch sie hindurch Formeln, in denen *u* vorkommt reiteriert oder sonstwie eingeführt werden. Weiterhin ist klar, dass $(\forall x)A^x/_u$, die Konklusion der Regel, keine Vorkommen von *u* enthält. Intuitiv bedeuten diese Beschränkungen, dass man eben keine speziellen Annahmen über dieses „willkürlich gewählte Individuum u" „einschmuggeln" darf, und dass der willkürlich gewählte Term auch wieder beseitigt werden muss. *u* ist eben nur ein temporärer Name für ein willkürlich gewähltes Objekt aus der Diskurswelt.

Regeln für den Existenz-Quantor

∃-Introduktion (∃I). Wenn man in einer Derivation $\mathcal{D}$ eine beliebige Instanz $A^t/_u$ einer existentiellen Formel $(\exists x)A^x/_u$ hat, dann kann man zu einem späteren Zeitpunkt diese existenielle Formel, $(\exists x)A^x/_u$, in der Derivation $\mathcal{D}$ hinschreiben.

∃-Eliminierung (∃E). Wenn man in einer Derivation $\mathcal{D}$ eine existentielle Formel $(\exists x)A^x/_u$ hat, und eine Subderivation, deren einzige Hypothese *A* und deren letzte Zeile *B* ist und deren Derivationslinie mit *u* beflaggt ist, so kann man zu einem späteren Zeitpunkt die Formel *B* in der Derivation $\mathcal{D}$ hinschreiben.

Schematische Darstellung

i	$(\exists x)A^{x}/_{u}$	
j	u | A	Hyp
	$\vdots$	
k	| B	
l	B	i, j-k, $\exists$E

	$\vdots$	
i	$A^{t}/_{u}$	
	$\vdots$	
j	$(\exists x)A^{x}/_{u}$	i, $\exists$I

Bemerkung zu ∃E: Die Formel *B* muss hinter einer mit *u* beflaggten Barriere und in einer hypothetischen Ableitung mit *A* als einziger Hypothese abgeleitet werden. Die Barriere hat denselben Zweck wie in der Regel ∀I: zu verhindern, dass Formeln, in denen u vorkommt, durch die Barriere „ein- und ausgeführt" werden. Insbesondere darf also die Formel *B* den „willkürlich gewählten" Term *u* nicht mehr enthalten. Die Hypothese *A* ist die Formel, aus der $(\exists x)A^{x}/_{u}$ durch existentielle Quantifizierung gewonnen wurde, die eventuell den „willkürlich gewählten Term" oder Individuenparameter *u* enthält. Intuitiv soll *u* das Individuum bezeichnen, von dessen Existenz wir wissen (durch $(\exists x)A^{x}/_{u}$), dessen Identität wir jedoch nicht kennen. *u* ist also auch hier wieder ein temporärer Name für solch ein unspezifiziert gelassenes Individuum aus der Diskurswelt.

Regeln für die Identität

=-Introduktion (=I). Man kann in einer Derivation $\mathcal{D}$ zu jeder Zeit eine Formel $t = t$ hinschreiben.

=-Eliminierung (=E). Wenn man in einer Derivation $\mathcal{D}$ eine Identitätsformel $s = t$ und eine Formel *A* hat, so kann man zu einem späteren Zeitpunkt, die Formel $A(^{t}//_{s})$ in der Derivation $\mathcal{D}$ hinschreiben, wobei $A(^{t}//_{s})$ *ein* Resultat der Ersetzung von keinem, einigen oder allen Vorkommen von *s* in *A* durch *t* ist.

Schematische Darstellung

i	$s = t$	
	$\vdots$	
j	A	
	$\vdots$	
k	$A(^{t}//_{s})$	i, j, =E

	$\vdots$	
i	$t = t$	=I
	$\vdots$	

Beachte, dass =I eine Regel ohne Prämissen ist.

Strategien für Quantorenregeln

Zusätzlich zu den Strategien für die Regeln für Konnektive können wir auch für die Quantorenregeln Strategien angeben, die helfen sollen, Formeln einer bestimmten quantoren-logischen Form zu gewinnen oder auszunutzen.

(i) Wenn du einen Allsatz $(\forall x)A^x/_u$ gewinnen willst, dann versuche zuvor *A* hinter einer mit *u* beflaggten Barriere zu gewinnen; dann kann man den Allsatz mit ∀I einführen.

(ii) Wenn du einen Existenzsatz $(\exists x)A^x/_u$ gewinnen willst, dann versuche zuvor irgendeine Instanz $A^t/_u$ zu gewinnen; dann kann man den Existenzsatz mit ∃I einführen.

(iii) Wenn du eine Formel *B* gewinnen willst und die schon gewonnenen Formeln einen Existenzsatz $(\exists x)A^x/_u$ enthalten, dann versuche *B* zuvor hinter einer mit *u* beflaggten Barriere und in einer Subderivation mit *A* als Hypothese zu gewinnen; dann kann *B* mit ∃E gewonnen werden.

(iv) Verwende ∃E grosszügig; man kann dabei nicht fehlgehen, höchstens zu viele unnötige Instanzen ableiten.

Beweistheoretische Begriffe von SPL1=

Im Folgenden einige Begriffe der Beweistheorie von S_{PL1}. Diese Begriffe sind ganz analog zu den entsprechenden Begriffen in S_{AL}, nur dass eben jetzt auf Formeln und Regeln von S_{PL1} Bezug genommen wird. Die Bemerkungen in „Beweistheoretische Begriffe von S_{AL}" über die Beziehung zwischen den hier definierten syntaktischen Begriffen und den früher eingeführten semantischen Begriffen gelten hier ebenso.

Wieder sind die Hypothesen einer Derivation in S_{PL1} nur diejenigen Formeln von S_{PL1}, die Gegenstände der Derivation sind und oberhalb des Hypothesenstrichs der zugehörigen Derivationslinie stehen (also insbesondere nicht die Hypothesen von Subderivationen der Derivation.)

Def. (Ableitung). Eine *Ableitung in S_{PL1}* ist eine Derivation, in der jede Zeile durch eine der Regeln von S_{PL1} gewonnen wurde.

Def. (Ableitung von A aus Γ). Eine *Ableitung in S_{PL1} von A aus Γ* ist eine Ableitung in S_{PL1}, deren Hypothesen alle in *Γ* sind und deren letzter Gegenstand (*item*) *A* ist.

Def. (ableitbar). Eine Formel *A* ist *ableitbar in S_{PL1} aus Γ* ($\Gamma \vdash A$) gdw es gibt eine Ableitung in SPL1= von A aus *Γ*.

Def. (Beweis). Ein *Beweis in S_{PL1} von A* ist eine Ableitung in S_{PL1} von A aus ∅.

(D.h. ein Beweis ist eine Ableitung aus der leeren Menge von Hypothesen.)

Def. (beweisbar). Eine Formel *A* ist *beweisbar in S_{PL1}* ($\vdash$ A) gdw es gibt einen Beweis in S_{PL1} von A.

Man sagt in diesem Fall auch: *A* ist ein Theorem oder Satz von S_{PL1}.

Def. (Konsistenz von Mengen). Eine Menge von Formeln *Γ* ist *konsistent in S_{PL1}* (widerspruchsfrei) gdw es gibt eine Formel *A, die nicht aus 5 ableitbar ist* (nicht *Γ* $\vdash$ A).

Dies ist ein syntaktischer Konsistenzbegriff und muss sorgfältig vom semantischen Konsistenzbegriff (Erfüllbarkeit) unterschieden werden.

Aus dieser Definition ergibt sich, dass eine Menge von Formeln, *Γ* , inkonsistent in S_{PL1} ist gdw sie nicht konsistent in S_{PL1} ist, was wiederum bedeutet, dass aus einer solchen inkonsistenten Menge alle Formeln ableitbar sind, insbesondere *A* und *~A*, für jede Formel A.

Def. (gültige Argumente). Ein Argument $A_1, \dots, A_n / \therefore B$ ist *gültig in S_{PL1}* gdw $\{A_1, \dots, A_n\} \vdash B$.

(d.h. wenn die Konklusion aus den Prämissen in S_{PL1} ableitbar ist.)

Def. (äquivalent). Zwei Formeln *A* und *B* sind äquivalent in S_{PL1} gdw $\{A\} \vdash B$ und $\{B\} \vdash A$.

(d.h. wenn sie auseinander in S_{PL1} ableitbar sind.)