(Sehr) Elementare Mengenlehre

Georg Cantors „Definition“ einer Menge: eine Menge ist eine Zusammenfassung von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen. Diese Objekte heißen auch die *Elemente* der Menge.

Beispiele:

a) Die Menge der Studenten in diesem Raum

b) Die Menge der Buchstaben des lateinischen Alphabets

c) Die Menge der geraden Zahlen

d) {2, der Eiffelturm, Königin Elisabeth}

(Mengennotation hier informell verwendet)

Mengen können endlich oder unendlich sein, d.h. endlich oder unendlich viele Elemente enthalten.

Notationelle Konvention

$X, Y, \ldots$ stehen für beliebige Mengen

x, y, … stehen für beliebige Objekte, insbesondere auch: Mengen.

Grundbegriff der Mengenlehre

Das Symbol „$\in$“ bezeichnet die Elementbeziehung.

„$x \in X$“ steht für „x ist Element der Menge X“

Definition

$x \notin X$ gdw. es ist nicht der Fall, dass $x \in X$.

Extensionalitätsaxiom

Wenn für alle x gilt, dass $x \in X$ gdw $x \in Y$, dann $X = Y$.

Dies besagt, dass Mengen genau durch ihre Elemente bestimmt sind. Dieses Axiom wird üblicherweise benutzt, um die Gleichheit zweier Mengen zu beweisen.

Beachte: das Axiom gilt für Mengen, aber nicht für Eigenschaften. Das Axiom gilt z.B. für die Eigenschaften „hat ein Herz“ und „hat eine Niere,“ obwohl die beiden Eigenschaften verschieden sind.

Def. Untermenge, Teilmenge

$X \subseteq Y$ gdw für alle x: wenn $x \in X$, dann $x \in Y$.

Def. echte Untermenge

$X \subset Y$ gdw $X \subseteq Y$ und es gibt ein x so dass gilt: $x \in Y$ und $x \notin X$.

Äquivalent: $X \subset Y$ gdw $X \subseteq Y$ und $X \neq Y$

Def. leere Menge

Für alle x, $x \notin \varnothing$

Def. Universum

Für alle x, $x \in U$

Kommentar: Dies sollte nur verwendet werden, wenn der Bereich von „x“ auf ein festgelegtes Universum beschränkt ist.

Def. Durchschnittsmenge

$x \in X \cap Y$ gdw $x \in X$ und $x \in Y$.

Def. Vereinigungsmenge

$x \in X \cup Y$ gdw $x \in X$ oder $x \in Y$

Def. relative Komplementmenge

$x \in (X - Y)$ gdw $x \in X$ und $x \notin Y$.

Def. Komplementmenge

$x \in -X$ gdw $x \in (U - X)$

wobei U schon als ein festgelegtes Universum definiert sein soll.

Def. ungeordnetes *n*-Tupel

$x \in \{a_1, \ldots, a_n\}$ gdw $x = a_1$ oder … oder $x = a_n$.

Def. Potenzmenge (power set)

$X \in \mathcal{P}(Y)$ gdw $X \subseteq Y$

Die Potenzmenge $\mathcal{P}(Y)$ einer Menge Y ist die Menge aller Untermengen X von Y. X ist also ein Element von $\mathcal{P}(Y)$ gdw es eine Untermenge von Y ist.

Kommentar zur Terminologie: $|\mathcal{P}(Y)| = 2^{|Y|}$.

$|X|$ bezeichnet die *Kardinalität* oder *Mächtigkeit* der Menge X; für endliche Mengen entspricht die Kardinalität einer Menge der Anzahl ihrer Elemente.

Beispiele:

a) $\mathcal{P}(\{1,2\}) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$

b) $\mathcal{P}(\{1\}) = \{\varnothing, \{1\}\}$

c) $\mathcal{P}(\varnothing) = \{\varnothing\}$

Def. Abstraktion

$y \in \{x \mid A(x)\}$ gdw $A(y)$

$A(x)$ ist hier eine Aussage über x, z.B. „x ist eine natürliche Zahl und $x \geq 5$ und $x < 10$“. Dies ist die Bestimmung einer Menge durch eine Eigenschaft.

Man sollte Abstraktion nur dann verwenden, wenn der Bereich von „x“ von vornherein festgelegt ist, sonst führt die Definition zu Inkonsistenzen.

Alternative Notation: $\{x: A(x)\}$ statt $\{x \mid A(x)\}$.

Axiom: geordnetes Paar

$\langle x, y\rangle = \langle u, v\rangle$ gdw $x = u$ und $y = v$.

Gelegentlich wird ein geordnetes Paar $\langle x, y\rangle$ als $\{\{x\}, \{x, y\}\}$ definiert. Man kann dann obige Eigenschaft beweisen.

Beispiel:

$\langle 1, 2\rangle \neq \langle 1, 2\rangle$, aber $\{1, 2\} = \{2, 1\}$

Def. geordnetes n-Tupel

$\langle a_1, \ldots, a_n\rangle := \langle\langle a_1, \ldots, a_{n-1}\rangle, a_n\rangle$

Beispiele:

a) $\langle 1, 3, 2\rangle := \langle\langle 1, 3\rangle, 2\rangle$

b) $\langle 1, 3, 2, 4\rangle := \langle\langle\langle 1, 3\rangle, 2\rangle, 4\rangle$

Def. Relation

R ist eine Relation gdw für alle *x* gilt: wenn $x \in R$, dann gibt es ein *y* und ein *z* so dass gilt: $x = \langle y, z\rangle$.

Eine Relation ist also nichts anderes als eine Menge von geordneten Paaren.

Beispiel:

Die „ist echt größer als“ Relation über der Menge $\{1, 2, 3\}$ ist $\{\langle 3, 2\rangle, \langle 3, 1\rangle, \langle 2, 1\rangle\}$

Def. kartesisches Produkt:

$Y \times Z = \{x \mid$ es gibt ein *y* und ein *z* so dass
$x = \langle y, z\rangle$ und $y \in Y$ und $z \in Z\ \}$

d.h. $Y \times Z$ ist die Menge aller geordneten Paare mit linkem Element in *Y* und rechtem Element in *Z*.

Analoges gilt für das *n*-fache kartesische Produkt $X_1 \times \ldots \times X_n$.

Notation: Wir schreiben für „$X \times X$“ auch „X^2“, für „$X \times X \times X$“ auch „X^3“, etc.

Beispiel:

$\{a, b\} \times \{1, 2, 3\} =$
$\{\langle a, 1\rangle, \langle a, 2\rangle, \langle a, 3\rangle, \langle b, 1\rangle, \langle b, 2\rangle, \langle b, 3\rangle\}$

	1	2	3
a	$\langle a, 1\rangle$	$\langle a, 2\rangle$	$\langle a, 3\rangle$
b	$\langle b, 1\rangle$	$\langle b, 2\rangle$	$\langle b, 3\rangle$

Def. Funktion, Abbildung

Eine Funktion ist eine Relation, bei der es für jedes linke Element genau ein rechtes Element gibt:

f ist eine *Funktion* gdw *f* ist eine Relation und für alle *x, y, z* gilt: wenn $\langle x, y\rangle \in f$ und $\langle x, z\rangle \in f$, dann $y = z$.

Man kann sich folgendes Bild machen: Es gibt eine Menge *X* auf der die Funktion *f* definiert ist, nämlich die Menge der linken Elemente von *f*. Für jedes Element *x* in dieser Menge liefert *f* genau ein Ding,

$f(x)$, nämlich das eindeutig bestimmte rechte Element, das dem linken Element entspricht.

Dies läuft auf eine Definition von „$f(x)$" hinaus, wenn x ein linkes Element von f ist; in allen andern Fällen vermeide „$f(x)$", da es keinen Sinn ergibt. Wir schreiben auch manchmal „fx" anstelle von „$f(x)$", und „fxy" oder „$f(x, y)$" anstelle von „$f(\langle x, y\rangle)$".

Def. definiert auf

Eine Funktion f ist definiert am „Punkt" x, wenn x ein linkes Element von f ist; f ist definiert auf einer Menge X, wenn jedes Element von X ein linkes Element von f ist. X nennt man auch den Definitionsbereich von f. Gebrauche „$f(x)$" nur, wenn f an x definiert ist.

Def. Funktionsraum

Y^X ist die Menge aller Funktionen, die genau auf X definiert sind, und so dass gilt: für jedes $x \in X$, $f(x) \in Y$.

Manchmal wird auch die Notation „$X \longrightarrow Y$" verwendet.

Def. ℕ

ℕ ist definiert als die Menge der nicht-negativen, ganzen Zahlen $0,1,2, \ldots$.

Manchmal denken wir uns ℕ auch mit 1 anfangend.

Konvention: Wir verwenden i, j, k, l, m, n als Variablen über ℕ.

Def. Folge

f ist eine *abzählbare Folge* von Xen gdw $f \in X^{\mathbb{N}}$.

D.h. eine abzählbare Folge ist eine Funktion, die genau auf ℕ definiert ist.

f ist eine *endliche Folge* von Xen gdw $f \in X^{\mathbb{N}'}$, für ein $\mathbb{N}'$, das ein „Anfangssegment" (z.B. {0,1,2,3}) von ℕ ist.

(Manchmal ist es besser, mit 1 anzufangen.)

f ist eine Folge von Xen, wenn f entweder eine abzählbare oder endliche Folge von Xen ist.

Subskripte

Wenn x eine Folge ist, die auf ℕ oder auf einem Anfangssegment von ℕ, zu dem n gehört, definiert ist, dann setzen wir $x_n = x(n)$.

Inverse Relation, Umkehrrelation

Sei R eine 2-stellige Relation von X nach Y, also $R \subseteq X \times Y$. Dann heißt R^{-1} die *inverse Relation* von R, wenn gilt

$$R^{-1} = \{\langle y, x\rangle \mid \langle x, y\rangle \in R\}$$

Es gilt also: $R^{-1} \subseteq Y \times X$

Eigenschaften von Funktionen

Injektion: Eine Funktion $f: A \longrightarrow B$ heisst *injektiv*, wenn aus $f(x) = f(y)$ folgt, dass $x = y$, für alle $x, y \in A$.

Surjektion: Eine Funktion $f: A \longrightarrow B$ heisst *surjektiv*, wenn es zu jedem $y \in B$ mindestens ein $x \in A$ gibt, so dass $f(x) = y$. Man spricht dann auch von einer *Abbildung auf B*.

Bijektion: Eine Funktion $f: A \longrightarrow B$ heisst *bijektiv*, wenn sie injektiv und surjektiv ist.

Merke: Wenn f eine Bijektion ist, dann ist auch f^{-1}, d.h. die inverse Funktion von f, eine Funktion.

Komposition von Funktionen

Aus zwei Funktionen, $f: A \longrightarrow B$ und $g: B \longrightarrow C$, kann man eine dritte Funktion durch Komposition gewinnen:

$$g \circ f = \{\langle x, z\rangle \mid \text{es gibt ein } y \text{, so dass } \langle x, y\rangle \in f \text{ und } \langle y, z\rangle \in g\}$$

Es gilt also: $g \circ f(x) = g(f(x))$, für alle $x \in A$.

Unendliche Mengen

Def. Eine Menge A heißt *gleichmächtig* zu einer Menge B, $A \sim B$, wenn es eine Bijektion $f: A \longrightarrow B$ gibt.

Endliche Mengen sind genau dann gleichmächtig, wenn sie gleich viele Elemente haben.

Eine Menge A ist *unendlich*, wenn A eine gleichmächtige echte Teilmenge B hat.

Beispiele: Die Menge der natürlichen Zahlen, der ganzen Zahlen, der rationalen Zahlen, …

Eine Menge A ist *abzählbar* gdw $A \sim \mathbb{N}$.

Beispiel: Die Menge der rationalen Zahlen ist abzählbar.

Interessanterweise sind nicht alle unendlichen Mengen abzählbar:

Beispiel: Die Menge der reellen Zahlen ist nicht abzählbar.

Nicht abzählbare unendliche Mengen nennen wir auch *überabzählbar.*