Mathematische Grundlagen: Logik

Vorlesung mit Übung

Dr. Stefan Thater

FR Sprachwissenschaft und Sprachtechnologie

Universität des Saarlandes

(basiert auf dem Skript von Dr. Werner Saurer)

Literatur

Leblanc, H., W. Wisdom, Deductive Logic. Allyn and Bacon, 1976.

Thomason, R., Symbolic Logic. Macmillan, 1970.

Partee, B., A. ter Meulen, R.Wall, Mathematical Methods in Linguistics. Kluwer 1990.

Einführung: Was ist Logik?

1. Die Logik beschäftigt sich mit dem Denken. Aber anders als die Psychologie, die das Denken empirisch und beschreibend (was ist) untersucht, befasst sich die Logik mit dem Denken als normative, präskriptive Wissenschaft (was sein soll, was „gutes“ Denken ausmacht).

2. Als Bausteine oder Einheiten des Denkens können wir Schlüsse oder Argumente betrachten.

Beispiele von Argumenten:

(1) Wenn es regnet, ist die Strasse nass.
Es regnet.
Also ist die Straße nass.

(2) Wenn es regnet, ist die Straße nass.
Es regnet nicht.
∴ Die Straße ist nicht nass.

(3) Wenn Sokrates ein Mensch ist, dann ist er sterblich.
Nun ist Sokrates kein Mensch.
Folglich ist er auch nicht sterblich.

(4) Hans ist gross und dick.
Somit ist er dick.

(5) Es gibt unendlich viele natürliche Zahlen.
Für jede natürliche Zahl n gibt es eine Primzahl m mit $m \geq n$.
Damit ist bewiesen, dass es unendlich viele Primzahlen gibt.

3. Wie können wir Argumente charakterisieren? Ein Argument beinhaltet

a) eine endliche Folge von deklarativen Sätzen, $S_1, \ldots, S_n$, $n \geq 2$.

b) die ersten n-1 Sätze heißen *Prämissen*, der letzte *Konklusion*

c) eine mehr oder weniger implizite Behauptung, dass die Prämissen die Konklusion begründen oder stützen.

Im Kontext erscheinen die Argumente im allgemeinen nicht in der in den Beispielen exemplifizierten Standardform (Prämissen vor Konklusion, jeder Satz beginnt in neuer Zeile, etc.). Man kann sie jedoch immer in diese Standardform bringen, und es ist ratsam, das in jedem Fall zu tun.

4. Die unter 3c) erwähnte Behauptung können wir in einem starken oder einem schwächeren Sinne verstehen:

a) stark: Die Wahrheit der Prämissen garantiert mit absoluter Gewissheit (100 %ig) die Wahrheit der Konklusion. Argumente, die eine solch starke Behauptung beinhalten, nennen wir *deduktive Argumente*, und die entsprechende Logik *deduktive Logik*.

b) schwächer: Die Wahrheit der Prämissen garantiert mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit (≤100%), dass auch die Konklusion wahr ist. Solche Argumente nennt man *induktive Argumente*, und die entsprechende Logik *induktive Logik*.

Diese Vorlesung beschäftigt sich nur mit der deduktiven Logik.

Bei einem „guten“ deduktiven Argument stimmt die Behauptung, d.h. es gibt keinen Fall, wo die Prämissen wahr sind, die Konklusion jedoch falsch ist. Immer wenn die Prämissen wahr sind, ist auch die Konklusion wahr. (Beachte den Konditional!) Solche guten deduktiven Argumente nennen wir *logisch gültig*.

Bei einem „schlechten“ deduktiven Argument stimmt die Behauptung nicht. D.h. es gibt wenigstens einen Fall (Situation, etc.), in dem die Prämissen wahr sind, die Konklusion jedoch falsch ist. Solche schlechten deduktiven Argumente nennen wir *logisch ungültig*.

7. Die Logik ist im doppelten Sinn eine formale Wissenschaft. Auf den Inhalt der Argumente kommt es nicht an, sondern nur auf ihre Form. Z.B. haben die Argumente (2) und (3) oben eine gemeinsame (logisch ungültige) Form, nämlich:

Wenn **A**, dann **B**.

Nicht-**A**.

∴ Nicht-**B**.

Die Logik ist die Theorie dieser Argumentformen oder Schlussweisen. Es gibt unendlich viele gültige und ungültige Schlussweisen, und eine Aufgabe der Logik ist es, Methoden zu entwickeln, die es erlauben, die gültigen von den ungültigen zu unterscheiden.

8. Unsere Vorgehensweise wird sein, formale Systeme zu konstruieren, die präziser und einfacher sind als die natürlichen Sprachen, aber dennoch in einem erkennbaren Zusammenhang mit den natürlichen Sprachen stehen (sie sollen Formalisierungen der natürlichen Sprachen sein). Dadurch lässt sich von den formalen Systemen auf die natürlichen Sprachen zurückschliessen.

9. Formale Systeme kann man unter vier Aspekten studieren:

a) Die *Grammatik* beschäftigt sich mit den zulässigen Zeichen und den zulässigen Kombinationen von Zeichen einer Sprache. Ein zentraler Begriff ist der der Wohlgeformtheit oder Grammatikalität von Ausdrücken. Da interessante Sprachen meist unendlich sind, muss ihre Grammatik rekursive Regeln enthalten.

b) Die *Semantik* befasst sich mit der Beziehung zwischen der Sprache und der „Welt", also dem, auf das sich sprachliche Ausdrücke „beziehen". Zentrale Begriffe sind hier Bedeutung, Wahrheitswert, Interpretation, Erfüllbarkeit, logische Wahrheit, logische Äquivalenz, logische Folgerung, etc.

c) Die *Beweistheorie* befasst sich mit der formalen, vom Inhalt oder der Bedeutung absehenden, Manipulation von Zeichen und Ausdrücken. Zentrale Begriffe sind hier Axiom, Schlussregel, Beweis, Ableitung, Beweisbarkeit, Ableitbarkeit, (syntaktische) Konsistenz, etc..

d) *Anwendung:* Formale Systeme werden normalerweise konstruiert, um sie auf bestimmte Probleme anzuwenden. So kann man z.B. mit der Aussagen- und Prädikatenlogik bestimmte natürlichsprachliche Argumente formalisieren. Durch die Beziehung zu natürlichsprachlichen Objekten erhalten die formalen Sprachen andererseits eine Bedeutung zugewiesen (informelle Semantik, im Gegensatz zur formalen Semantik).

a: uninterpretierte Sprache. Ist grundlegend und wird von allen anderen Aspekten vorausgesetzt.

a + b: interpretierte Sprache

a + c: uninterpretiertes formales System

a + d: Formalisierung und informelle Semantik

10. Wir beginnen die Vorlesung mit dem Studium der elementaren Mengenlehre. Mengentheoretische Begriffe tauchen in der Logik überall auf. Das Deutsche bereichert durch die Mengenlehre ist gewissermassen unsere Metasprache, die wir zum genauen Sprechen über unseren Gegenstandsbereich (Objektsprache) gebrauchen.