Verband/Lattice

Definition 1: Partiell-geordnete Mengen (Posets)
Ein Poset ist eine Menge P mit einer Ordnungsrelation 'kleiner gleich', die reflexiv, transitiv und antisymmetrisch, aber nicht notwendig total ist

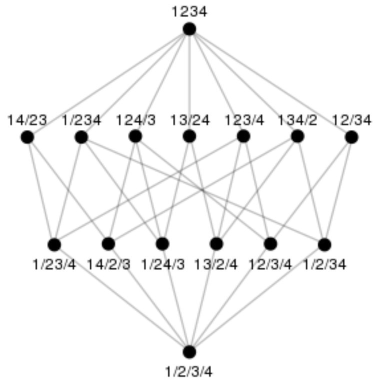
Sei P eine partiell geordnete Menge und $S \subseteq P$.

Definition 2: obere und untere Schranke

- Ein Element $x \in P$ ist eine obere Schranke (upper bound) von S genau dann, wenn $s \leq x$ für jedes $s \in S$
- S^u bezeichnet eine Menge von oberen Schranken
- Ein Element $x \in P$ ist eine untere Schranke (lower bound) von S genau dann, wenn $s \geq x$ für jedes $s \in S$
- S^l bezeichnet Menge von unteren Schranken

Definition 3: größte untere Schranke (infimum) und kleinste obere Schranke (supremum)

- **infimum** x ist die größte untere Schranke von S g.d.w.
  1. x ist eine untere Schranke von S
  2. $x \geq y$ für jedes $y \in S^l$
- das infimum von x und y, wird von $\inf(x, y)$ oder $x \wedge y$ bezeichnet
- **supremum** x ist die kleinste obere Schranke von S g.d.w.
  1. x ist eine obere Schranke von S
  2. $x \leq y$ für jedes $y \in S^u$
- das supremum von x und y, wird von $\sup(x, y)$ oder $x \vee y$ bezeichnet



Hesse diagram von einem Verband

Retrieved May 12th 2008 from:
http://en.wikipedia.org/wiki/Image:Lattice_of_partitions_of_an_order_4_set.svg

Definition 4: Verband

Sei sup(x, y) das supremum von y und x, und inf(x, y) das infimum

- P heißt ein Verband, wenn für jede $x, y \in P$ sup(x, y) und inf(x, y) existieren

Definition 4: Modularität

- Ein Verband ist ein **modularer Verband**, wenn
$x \leq b$ voraussetzt daß $x \vee (a \wedge b) = (x \vee a) \wedge b$

- Ein Paar (a, b) in einem Verband ist ein **modulares Paar** wenn gillt daß für jedes x, $a \vee b \leq x \leq b$ voraussetzt daß $(x \vee a)$ $\wedge b = x$

- Ein Verband heißt m-symmetrisch wenn für jedes modulares Paar (a, b) gillt daß (b, a) auch modular ist

- Ein Verband ist genau dann ein modularer Verband wenn alle Paare von Elementen modular sind: ein modularer Verband ist also automatisch m-symmetrisch

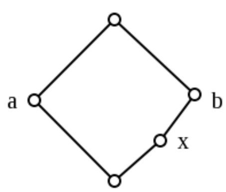


Figure 1: Smallest nonmodular lattice
Retrieved May 12th 2008 from:
http://en.wikipedia.org/wiki/Image:Smallest_nonmodular_lattice_2.svg