Einige Syntaktische Definitionen und Metatheoreme über $H_{P=}$

(aus Thomason, *Symbolic Logic*, Ch. X)

$H_{P=}$: Axiome: jede Instanz der acht Axiomenschemata und deren Universalisierungen (s.D8):

AS1: $A \supset (B \supset A)$

AS2: $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$

AS3: $(\sim A \supset \sim B) \supset (B \supset A)$

AS4: $(x)(A \supset B^x/u) \supset (A \supset (x)B^x/u)$

AS5: $(x)(A^x/u \supset B^x/u) \supset ((x)A^x/u \supset (x)B^x/u)$

AS6: $(x)A^x/u \supset A^t/u$

AS7: $t = t$

AS8: $s = t \supset (A \supset A^s//t)$

Regeln: Modus Ponens, d.h. $A \supset B, A \;/\!\!\therefore\; B$

D1. Eine Morphologie M für $H_{P=}$ ist eine Struktur, die aus folgenden Teilen besteht:

1. Eine unendliche Menge V_M von Individuenvariablen.
2. Eine unendliche Menge IP_M von Individuenparametern.
3. Eine Menge C_M von Individuenkonstanten.
4. Für jedes $i \geq 0$ eine Menge $P_M{}^i$ von i-stelligen Prädikatenparametern.

D2. Die Menge T_M von Termen der Morphologie M ist $IP_M \cup C_M$.

D3. Die Menge F_M der Formeln einer Morphologie M für $H_{P=}$ wird durch die folgenden Regeln festgelegt:

1. Wenn $s,t \in T_M$, dann $s = t \in F_M$.
2. Wenn $P \in P_M{}^0$, dann $P \in F_M$.
3. Wenn $P \in P_M{}^n$, $n>0$, und $t_1, ..., t_n \in T_M$, dann $Pt_1...t_n \in F_M$.
4. Wenn $A \in F_M$, dann $\sim A \in F_M$.
5. Wenn $A, B \in F_M$, dann $(A \supset B) \in F_M$.
6. Wenn $A \in F_M$, $x \in V_M$ und $u \in IP_M$, dann $(x)A^x/u \in F_M$.

D4. Sei X ein Ausdruck von M, und seien $s,t \in T_M$. Das Ergebnis X^s/t der Substitution von s für t in X ist die Formel, die man erhält, wenn man jedes Vorkommen von t in X durch ein Vorkommen von s ersetzt. Sei weiterhin $x \in V_M$. Das Ergebnis X^x/t der Substitution von x für t in X ist der Ausdruck, den man erhält, wenn man jedes Vorkommen von t in X durch ein Vorkommen von x ersetzt.

D5. Sei $A \in F_M$ und $s,t \in T_M$. Eine Formel B von M ist ein Ergebnis $A^s//t$ der Ersetzung von t durch s in A, wenn B sich von A nur dadurch unterscheidet, dass es Vorkommen von s an 0 oder mehr Stellen hat, an denen A Vorkommen von t hat.

D6. Seien $A \in F_M$, $x \in V_M$ und $u \in IP_M$. Dann ist u *frei für x in A*, wenn kein Vorkommen von u in A innerhalb des Skopus eines Allquantors (x) fällt.

D7. Sei $A \in F_M$. Dann ist B eine Allquantifizierung von A, wenn es ein $u \in IP_M$ und ein $x \in V_M$ gibt, so dass u frei ist für x in A, und B die Formel $(x)A^x/u$ ist.

D8. Sei $A \in F_M$. Die *Universalisierungen von A* sind durch die folgenden Regeln definiert:

1. A ist eine Universalisierung von A.
2. Wenn B eine Universalisierung von A ist, dann ist auch $(x)B^x/u$ eine Universalisierung von A, wobei $u \in IP_M$, $x \in V_M$ und u frei ist für x in B.

Nichts sonst ist eine Universalisierung von A.

D9. Ein *Beweis* in H ist ein Array $A_1, ..., A_n$ von Formeln von $H_{P=}$ so dass gilt: jedes Glied des Array ist entweder ein Axiom von $H_{P=}$ oder folgt aus vorhergehenden Gliedern durch Modus Ponens. Mit anderen Worten, für alle Zahlen i mit $1 \leq i \leq n$ gilt: A_i ist entweder ein Axiom von $H_{P=}$, oder es gibt Zahlen j, k < i mit $A_j = A_k \supset A_i$. Ein Beweis $A_1, ..., A_n$ heisst auch ein Beweis seines letzten Gliedes, A_n.

D10. Eine Formel A ist *beweisbar* in $H_{P=}$ (oder ein Theorem von $H_{P=}$), wenn es einen Beweis von A in $H_{P=}$ gibt. (Wir schreiben "$\vdash A$" für "A ist beweisbar".)

D11. Sei Γ eine Menge von Formeln von $H_{P=}$. Ein Array $A_1, ..., A_n$ von Formeln von $H_{P=}$ ist eine *Ableitung* von A_n aus Hypothesen in Γ, wenn für alle i mit $1 \leq i \leq n$ gilt:

(1) A_i ist entweder ein Axiom von $H_{P=}$, oder
(2) A_i ist ein Element aus Γ, oder
(3) es gibt Zahlen j, k < i mit $A_j = A_k \supset A_i$.

D12. Eine Formel A ist *ableitbar* (in $H_{P=}$) aus einer Menge von Formeln Γ von $H_{P=}$, wenn es eine Ableitung von A aus Γ gibt. (Wir schreiben "$\Gamma \vdash A$" für "A ist ableitbar aus Γ".)

D13. '$A \vee B$' =df '$A \supset B \supset B$'

D14. '$A \wedge B$' =df '$\sim (A \supset \sim B)$'

D15. '$A \equiv B$' =df '$(A \supset B) \wedge (B \supset A)$'

D16. $' (\exists x)A ' =_{df} ' \sim(x)\sim A '$

D17. **Eine Menge Γ von Formeln von $H_{P=}$ ist *konsistent* (in $H_{P=}$), wenn es eine Formel A von $H_{P=}$ gibt, für die gilt: nicht-$\Gamma \vdash A$. Eine Menge von Formeln ist *inkonsistent*, wenn sie nicht konsistent ist.**

M1. $\vdash A \supset A$

M2. $\vdash A$ **gdw** $\varnothing \vdash A$

M3. $\Gamma \vdash A$ **gdw es gibt eine endliche Untermenge Δ von Γ, mit $\Delta \vdash A$.**

M4. **Wenn $A \in \Gamma$, dann $\Gamma \vdash A$.**

M5. **Wenn $\Gamma \vdash A$, dann $\Gamma \cup \Delta \vdash A$.**

M6. **Wenn $\Gamma \vdash A$ und $\Delta \cup \{A\} \vdash B$, dann $\Gamma \cup \Delta \vdash B$.**

M7. **Wenn $\Gamma \vdash A \supset B$, dann $\Gamma \cup \{A\} \vdash B$.**

M8. **Wenn $\Gamma \cup \{A\} \vdash B$, dann $\Gamma \vdash A \supset B$.** (Deduktionstheorem, $\approx$ $\supset$intro)

M10. **Wenn $A_1, ..., A_n \vdash B$, *dann* $\vdash A_1 \supset . \ldots \supset . A_n \supset B$.** (generalis.Ded.theorem)

M11. **Wenn $\Gamma \vdash A \supset B$ und $\Delta \vdash A$ dann $\Gamma \cup \Delta \vdash B$.**

M12. **Wenn $\Gamma \cup \{\sim A\} \vdash \sim B$, *dann* $\Gamma \cup \{B\} \vdash A$.**

M13. $\sim A, A \vdash B$ ("ex falso quodlibet")

M19. **Wenn $\Gamma \vdash \sim\sim A$, dann $\Gamma \vdash A$.** ($\approx$ ~elim, Dopp.Negation)

M20. **Wenn $\Gamma \cup \{A\} \vdash B$ und $\Gamma \cup \{A\} \vdash \sim B$, dann $\Gamma \vdash \sim A$.** ($\approx$ ~intro, Indir. Beweis)

M21. **Wenn $\Gamma \vdash A$, dann $\Gamma \vdash A \vee B$; wenn $\Gamma \vdash B$, dann $\Gamma \vdash A \vee B$.** ($\approx$ $\vee$intro)

M22. **Wenn $\Gamma \vdash A \vee B$ und $\Gamma \cup \{A\} \vdash C$ und $\Gamma \cup \{B\} \vdash C$, dann $\Gamma \vdash C$.** ($\approx$ $\vee$elim)

M23. **Wenn $\Gamma \vdash A$ und $\Gamma \vdash B$, dann $\Gamma \vdash A \wedge B$.** ($\approx$ $\wedge$intro)

M24. **Wenn $\Gamma \vdash A \wedge B$, dann $\Gamma \vdash A$ und $\Gamma \vdash B$.** ($\approx$ $\wedge$elim)

M25. **Wenn $\Gamma \cup \{A\} \vdash B$ und $\Gamma \cup \{B\} \vdash A$, dann $\Gamma \vdash A \equiv B$.** ($\approx$ $\equiv$intro)

M26. **Wenn $\Gamma \vdash A \equiv B$ und $\Gamma \vdash A$, dann $\Gamma \vdash B$; und wenn $\Gamma \vdash A \equiv B$ und $\Gamma \vdash B$, dann $\Gamma \vdash A$.** ($\approx$ $\equiv$elim)

M29. **Wenn $\Gamma \vdash (x)A^x/u$, dann $\Gamma \vdash A^t/u$.** ($\approx$ uq elim)

M32. **Wenn $\Gamma \vdash A$ und u ist frei für x in A und kommt in Γ nicht vor, dann $\Gamma \vdash (x)A^x/u$.** ($\approx$ uq intro)

M37. **Wenn $\vdash A$, dann $\vdash A^s/t$.** (Termsubstitution)

M44. **Wenn $\Gamma \vdash s = t$, dann $\Gamma \vdash A$ *gdw* $\Gamma \vdash A^s//t$.** ($\approx$ = elim)

M45. $\Gamma \vdash t = t$. ($\approx$ = intro; Reflexivität von =)

M46. **Wenn $\Gamma \vdash s = t$, dann $\Gamma \vdash t = s$.** (Symmetrie von =)

M47. **Wenn $\Gamma \vdash r = s$ und $\Gamma \vdash s = t$, dann $\Gamma \vdash r = t$.** (Transitivität von =)

M48. **Wenn $\Gamma \vdash A^t/u$, dann $\Gamma \vdash (\exists x)A^x/u$.** ($\approx$ eq intro)

M49. **Wenn $\Gamma \vdash (\exists x)A^x/u$ und $\Gamma \cup \{A\} \vdash B$, dann $\Gamma \vdash B$.** ($\approx$ eq elim)
(wobei u ist frei für x in A und u kommt in Γ und B nicht vor)

M52. **Wenn $\Gamma \cup \{(\exists x)A^x/u \supset A^v/u\} \vdash B$, dann $\Gamma \vdash B$.**
(wobei u ist frei für x in A und v kommt in A, B und Γ)

M54. **Eine Menge Γ von Formeln von $H_{P=}$ ist inkonsistent gdw es gibt eine Formel A von $H_{P=}$, so dass $\Gamma \vdash A$ und $\Gamma \vdash \sim A$.**

M55. **Eine Menge Γ von Formeln von $H_{P=}$ ist konsistent gdw jede endliche Untermenge von Γ ist konsistent.**

M56. $\Gamma \vdash A$ **gdw** $\Gamma \cup \{\sim A\}$ **ist inkonsistent.**

M57. **Wenn Γ konsistent ist, dann gilt für alle Formeln A von $H_{P=}$, entweder $\Gamma \cup \{A\}$ ist konsistent oder $\Gamma \cup \{\sim A\}$ ist konsistent.**

M58. **Wenn Γ konsistent ist, u frei ist für x in A und v kommt in A und Γ nicht vor, dann ist $\Gamma \cup \{(\exists x)A^x/u \supset A^v/u\}$ auch konsistent.**

Der Konditional $(\exists x)A^x/u \supset A^v/u$ kann nicht immer falsch sein, semantisch gesprochen; denn wenn es etwas gibt, das A ist, dann muss es mindestens ein konkretes Objekt v geben, das A ist. (Siehe auch M52.)

M62. **Wenn $\Gamma \vdash C$ und $\Gamma \vdash A \equiv B$ und C' ist ein Resultat der Ersetzung von A durch B in C, dann $\Gamma \vdash C'$.** (rechtfertigt die Ersetzungsregel)