Probeklausur - V: Mathematische Logik SS99 W.Saurer

1. (a) Annotiere folgende Ableitung in Hs von $P \supset Q$ aus $\{ P \supset (P \supset Q)\}$.

   1. $P \supset (P \supset Q)$
   2. $(P \supset (P \supset Q)) \supset ((P \supset P) \supset (P \supset Q))$
   3. $(P \supset P) \supset (P \supset Q)$
   4. $(P \supset ((P \supset P) \supset P)) \supset ((P \supset (P \supset P)) \supset (P \supset P))$
   5. $P \supset ((P \supset P) \supset P)$
   6. $(P \supset (P \supset P)) \supset (P \supset P)$
   7. $P \supset (P \supset P)$
   8. $P \supset P$
   9. $P \supset Q$

   (b) Ist dies auch eine Ableitung von $P \supset Q$ aus $\{ P \supset (P \supset Q),\ Q \}$ in Hs? Gib eine kurze Begründung.

2. Annotiere folgenden Beweis eines syntaktischen Metatheorems über Hs. (Beziehe dich auf Metatheoreme und Definitionen aus Kapitel V von Thomason (siehe Handout der syntaktischen Metatheoreme).

   1. $\sim A, A \vdash \sim A$
   2. $\sim A \vdash A \supset \sim A$
   3. $\sim A , \sim(A \supset \sim A) \vdash A \supset \sim A$
   4. $\sim A , \sim(A \supset \sim A) \vdash \sim(A \supset \sim A)$
   5. $\sim A \vdash \sim\sim(A \supset \sim A)$
   6. $\sim(A \supset \sim A) \vdash A$
   7. $A \wedge A \vdash A$

3. Beweise folgende syntaktische Metatheoreme über Hs. Du kannst dabei jedes Metatheorem aus Kapitel V, Thomason (siehe Handout) benutzen. (Hinweis: Konstruiere zunächst eine Ableitung in Ss und übertrage diese dann in einen Beweis des entsprechenden Metatheorems - wie in der Vorlesung gezeigt.)

   (a) $A \vdash \sim\sim A$

   (b) $A \supset B \vdash \sim B \supset \sim A$

4. Im Beweis von V. M8 (Deduktionstheoreme) gingen wir in zwei Schritten vor. Zunächst haben wir die Ableitung $C_1, ..., C_i, ..., C_n$ von B aus $\Gamma \cup \{A\}$ umgeformt in einen Array $A \supset C_1, ..., A \supset C_i, ..., A \supset C_n$. Dann haben wir systematisch weitere Zeilen eingeführt, um den Array wieder in eine Ableitung in Hs umzuwandeln. Welche Art von Einfügungen muss man vornehmen für den Fall, dass C_i ein Axiom war? (Zeige, dass diese Einfügungen wieder zu einer Ableitung in Hs führen.)

5. Die folgenden Theoreme sind die Korrektheits- und Vollständigkeitsresultate für Hs. Beweise 2 aus der Menge {K2, K3, V2, V3}. Beim Beweis von Xi, darf man Xi-1 voraussetzen (für X = K, V; und für i = 2, 3). Ausserdem dürfen Metatheoreme aus den Kapiteln V (Syntax von Hs) und VI (Semantik von Hs) benützt werden.

K1.	Wenn $\vdash A$, dann $\models A$.
K2.	Wenn $\Gamma \vdash A$, dann $\Gamma \models A$.
K3.	Wenn Γ simultan erfüllbar ist, dann ist Γ konsistent.
V1.	Wenn Γ konsistent ist, dann ist Γ simultan erfüllbar.
V2.	Wenn $\Gamma \models A$, dann $\Gamma \vdash A$.
V3.	Wenn $\models A$, dann $\vdash A$.