12. Sitzung

Vollständigkeit von $H_{P=}$ (2. Teil)

Wir haben das letzte Mal gezeigt, dass jede konsistente Menge Γ einer Morphologie M zu einer M'-gesättigten Menge Γ^* erweitert werden kann, wobei M' eine S-Erweiterung von M ist.

M-gesättigt Mengen sind simultan erfüllbar

Wir müssen jetzt noch zeigen, dass eine M-gesättigte Menge der Prädikatenlogik simultan erfüllbar ist.

Wir machen dies konstruktiv durch Angabe einer Belegung V für eine M-gesättigte Menge Γ, so dass gilt: $V(A) = W$ gdw $A \in \Gamma$. (V erfüllt also Γ simultan.)

Wie sieht nun diese Belegung V aus?

Sie muss jedem nicht-logischen Symbol eine Bedeutung der richtigen Art zuweisen.

Satzparamter bekommen Wahrheitswerte als ihre Bedeutung zugewiesen.

Terme bekommen Objekte als ihre Bedeutung zugewiesen.

n-stellige Prädikatenparameter bekommen Mengen von n-tupeln von Objekten als ihre Bedeutung zugewiesen.

Satzparameter - d.h. 0-stellige Prädikatenparameter - werden also - wie in der Aussagenlogik - durch Wahrheitswerte interpretiert. Und wir werden V demgemäss so einrichten, dass wir festlegen:

Wenn P ein Satzparameter ist, dann ist

$$V(P) = W \text{ gdw } P \in \Gamma$$

Aber welche Dinge sollen als unsere Objekte dienen?

Die - auf den ersten Blick etwas überraschende - Antwort lautet:

Wir interpretieren die Terme durch sich selbst! D.h. die "Bedeutung" eines Terms t ist t selbst, oder mit andern Worten:

$$V(t) = t$$

Dies ist zwar auf den ersten Blick etwas ungewöhnlich, denn normalerweise bezeichnet ein Zeichen etwas anderes als sich selbst, aber es ist auf jeden Fall vollkommen legitim in Bezug auf den Begriff einer Belegung.

Die Interpretation von Prädikatenparametern geht dann wie folgt:

Wenn P ein 1-stelliger Prädikatenparameter ist, dann legen wir fest:

$$V(P) = \{t: Pt \in \Gamma\}$$

Wenn P ein 2-stelliger Prädikatenparameter ist, dann legen wir fest:

$$V(P) = \{\langle s,t\rangle: Pst \in \Gamma\}$$

Und allgemein:

Wenn P ein i-stelliger Prädikatenparameter ist, dann legen wir fest:

$$V(P) = \{\langle t_1, ..., t_i\rangle : Pt_1 ... t_i \in \Gamma\}$$

Dies ist fast die wahre Geschichte über V. Es gibt nämlich ein Problem mit Identitätsformeln, also Formeln der Form $s = t$.

Das Problem ist folgendes. Nehmen wir an s und t seien zwei verschiedene Terme unserer Morphologie M, d.h. $s, t \in T_M$, mit $s \neq t$.

Die Wahrheitsbedingung für Identitätsaussagen ist folgende:

$$V(s = t.) = W \text{ gdw } V(s) = V(t).$$

Wenn wir nun - wie oben vorgeschlagen - die Terme durch sich selber interpretieren, dann bekommen wir folgende Bedingung:

$$V(s = t.) = W \text{ gdw } V(s) = V(t) \text{ gdw } s = t.$$

Also könnten Identitätsaussagen mit zwei verschiedenen Termen links und rechts von = nie wahr sein! Wir wollen aber diese Möglichkeit nicht ausschliessen.

Die Interpretation von Termen muss also etwas modifiziert werden, um diesem Problem zu begegnen.

Die Lösung ist wie folgt:

Wir teilen die Terme in Äquivalenzklassen ein; und zwar sollen s und t in der selben Klasse sein, wenn $s = t \in \Gamma$.

Dann wählen wir für jede Klasse E_s einen Repräsentanten, t_{Es}, der die Bedeutung jedes der Terme in E_s sein soll; d.h.

$$V(s) = t_{Es},$$

D.h. die "Bedeutung" eines Terms s ist der Repräsentant der Äquivalenzklasse, zu der s gehört.

Beispiel:

Seien r, s und t in derselben Äquivalenzklasse E_t und sei s der Repräsentant von E_t.

Dann sieht V so aus:

	r	s	t
V	s	s	s

Dann nehmen wir als unsere Domäne D für die Interpretation V die Menge der Repräsentanten der einzelnen Äquivalenzklassen.

Entsprechend verändern wir die Interpretation von i-stelligen Prädikatenparametern (i ≥ 1) wie folgt:

$V(P) = \{<t_1, ..., t_i> : t_1, ..., t_i \in D \text{ und } Pt_1 ... t_i \in \Gamma\}$

(ein i-stelliger Prädikatenparameter bezeichnet also eine Menge von i-tupeln von Repräsentanten)

Wir müssen nun noch einige Dinge über die Terme und ihre Interpretation zeigen.

Z.B. (a) jeder Term ist in einer Äquivalenzklasse; d.h.

für alle $t \in T_M$: $t \in E_t$

(b) kein Term ist in zwei verschiedenen Äquivalenzklassen; d.h.

wenn $t \in E_s$ und $t \in E_r$, dann $E_s = E_r$

Beweise in der Vorlesung; siehe auch handschriftliche Kopien.

Dies zeigt, dass wir es mit einer echten Äquivalenzklasseneinteilung der Menge T_M zu tun haben.

Weiterhin müssen wir folgende Lemmata zeigen, die für den induktiven Beweis, dass $V(A) = W$ gdw A in Γ (Γ M-gesättigt), benötigt werden.

Lemma 1. $s = V(s) \in \Gamma$

Lemma 2. $s = t \in \Gamma$ gdw $V(s) = V(t)$

Beweise ebenfalls in der Vorlesung und auf einem Handout.

Jetzt können wir den Beweis, dass eine Formel A unter V wahr ist gdw A in Γ ist (Γ M-gesättigt) in Angriff nehmen.

Beweis:

Durch Induktion über die Komplexität einer Formel A.

D.h. wir müssen die Behauptung zunächst für Aussagen vom Grad 0, also für atomare Formeln, zeigen.

Davon gibt es drei Arten:

i) A ist ein 0-stelliger Prädikatenparameter, also ein Satzparameter P.

ii) A ist eine Formel der Form $s=t$, also eine Identitätsformel.

iii) A ist eine Formel der Form $Pt_1...t_n$.

Für Formeln der Form i) - also Satzparameter - gilt dasselbe, was für schon für H_s festgestellt hatten. Die Konstruktion der Belegung V zeigt, dass die Behauptung für diesen Fall stimmt.

ii) Sei $A = s = t$

$s = t \in \Gamma$	gdw	$V(s) = V(t)$	Lemma 2
$V(s = t) = W$	gdw	$V(s) = V(t)$	Def. von $V(s = t)$
$V(s = t) = W$	gdw	$s = t \in \Gamma$	
$V(A) = W$	gdw	$A \in \Gamma$	

iii)

1.	Sei $A = Pt_1...t_n$.	Annahme
2.	Sei $Pt_1...t_n. \in \Gamma$.	Annahme
3.	Also $\Gamma \vdash Pt_1...t_n$.	X. M4
4.	$t_i = V(t_i) \in \Gamma$	Lemma 1
5.	$\Gamma \vdash t_i = V(t_i)$	X. M4
6.	$\Gamma \vdash PV(t_1)...V(t_n)$.	X. M44, n-mal
7.	$PV(t_1)...V(t_n) \in \Gamma$.	wg. Γ M-gesättigt
8.	$<V(t_1), ... , V(t_n)> \in V(P)$	Def. von $V(P)$
9.	$V(Pt_1...t_n) = W$	Wahrheitsbeding.

Also, wenn $Pt_1...t_n. \in \Gamma$, dann $V(Pt_1...t_n) = W$.

Also auch in diesem Fall: wenn $A \in \Gamma$, dann $V(A) = W$.

(Die andere Richtung geht entsprechend umgekehrt; siehe auch handschriftliches Handout.)

Damit ist die Basis der Induktion bewiesen.

Jetzt müssen wir noch den Induktionsschritt beweisen.

Nehmen wir also an, die Behauptung sei wahr für Formeln vom Grad < n. Wir müssen zeigen, dass die Behauptung dann auch für Formeln vom Grad n gilt.

Es gibt drei Fälle zu betrachten.

i) A ist von der Form $\sim B$ (Negation).

ii) A ist von der Form $(C \supset D)$ (Konditional).

iii) A ist von der Form $(x)A^x/_u$ (All-Formel).

Die Fälle i und ii werden ganz genauso bewiesen wie in der Aussagenlogik.

Wir müssen also nur noch den Fall iii zeigen.

(Beweis in der Vorlesung; siehe auch handschriftliches Handout.)

Damit ist gezeigt, dass für alle Formeln der Morphologie M gilt:

$V(A) = W$ gdw $A \in \Gamma$.

Wir haben also gezeigt, dass eine M-gesättigte Menge simultan erfüllbar ist.

Und damit ist die Vollständigkeit von $H_{P=}$ bewiesen.

Resultate der Adäquatheit von $H_{P=}$

Die Vollständigkeit und Korrektheit der Prädikatenlogik mit Identität ist sehr viel interessanter als die von H_S, weil in der Prädikatenlogik viel mehr formalisiert werden kann also in H_S.

Die meisten Logiker glauben, dass in der Prädikatenlogik alle bekannten mathematischen Theorien formalisiert werden können.

Man wählt dazu eine geeignete Morphologie aus und fügt eine Menge von Postulaten Γ zu der Menge der logischen Axiome hinzu.

(Z.B. um eine der axiomatischen Mengentheorien - Zermelo-Fraenke (ZF) oder Gödel-Bernays (GB) - zu formalisieren, braucht man nur einen 2-stelligen Prädikatenparameter für die Beziehung der Elementschaft ($\in$) zu haben, und man fügt dann die Axiome der jeweiligen Mengentheorie zu den logischen Axiomen hinzu.)

Die Theoreme einer solchen Theorie Θ sind alle Formeln A, die aus der Postulatenmenge, Γ, ableitbar sind:

$\Theta = \{A: \Gamma \vdash A\}$.

Dies kann man nicht nur für mathematische Theorien machen, sondern für jedes andere Wissensgebiet.

Wir können Mengen Γ von Formeln einer Morphologie M für $H_{P=}$ als Postulatenmengen für Theorien, d.h. *Axiomatisierungen von Theorien*, betrachten.

Die Modelle von solchen Mengen Γ sind die Gegenstandsbereiche oder Situationen, von denen diese Theorien handeln.

Eine Theorie kann hier betrachtet werden als die Menge der Theoreme, die von einer Menge von Postulaten Γ generiert werden.

Eine Theorie $\Delta = \{A : \Gamma \vdash A.\}$ ist also eine *deduktiv abgeschlossene* Menge.

D.h. für Δ gilt: $A \in \Delta$ gdw $\Delta \vdash A$.

I.a. gibt es viele verschiedene Axiomatisierungen für eine Theorie Δ.

Einige Theorien werden gar keine Modelle haben, nämlich die *inkonsistenten* Theorien.

Die Formeln einer Theorie Δ sind genau die Formeln, die in allen Modellen von Δ wahr sind.

Das zeigt M20: $\Gamma \models A$ gdw $\Gamma \vdash A$.

Jedes Theorem von Δ ist wahr in allen Modellen von Δ, und jede Formel, die in allen Modellen von Δ wahr ist, ist in Δ (d.h. aus Γ ableitbar).

Jede Theorie Δ in einer Morphologie M entspricht einer Menge von relationalen Strukturen vom Typ M.

Wenn $\Delta = \varnothing$, dann ist jede relationale Struktur vom Typ M ein Modell von Δ.

Je mehr Formeln A man zu Γ hinzunimmt, desto mehr schränkt man die Menge der Modelle von Γ ein (ausser natürlich, wenn $\Gamma \vdash A$).

Die Menge der Modelle einer Theorie Δ sagt etwas aus über den *Abstraktionsgrad* der Theorie. (D.h. je mehr (verschiedenartige) Modelle, desto abstrakter ist die Theorie.)

Z.B. Gruppentheorie

Theorie der Halbordnungen

(diese Theorien sind relativ abstrakt, da es viele verschiedenartige - d.h. endliche und unendliche, etc. - Modelle gibt)

Am andern Extrem wären sehr spezielle Theorien, die im wesentlichen nur ein Modell zulassen (bis auf Isomorphie natürlich).

Solche Theorien nennt man *kategorial*.

Eine Theorie Δ ist *kategorial* $=_{df}$ alle Modelle von Δ sind isomorph zu einem Modell.

Man kann zeigen, dass solche Theorien selten sind. Alle Theorien von mathematischem Interesse sind wesentlich abstrakt, indem sie nicht-isomorphe Modelle haben. (Z.B. {1, 2, 3, ... }, geordnet mit <. Es gibt keine Theorie in $H_{P=}$, die nur Modelle, die dazu isomorph sind.)

Mit den Adäquatheitsresultaten kann man wichtige Metatheoreme zeigen.

Z.B. Kompaktheit.

M24. Wenn jede endliche Untermenge einer Menge Γ ein Modell hat, dann hat Γ ein Modell.

M25. Wenn $\Gamma \mid\!\vdash A$, dann $\Delta \mid\!\vdash A$, für eine endliche Untermenge Δ von Γ.

M28. Wenn Γ beliebig grosse endliche Modelle hat, dann hat Γ ein unendliches Modell.

M29. (Löwenheim-Skolem-Theorem)

Sei Γ eine Menge von Formeln einer abzählbaren Morphologie M.

Wenn Γ unendliche Modelle hat, dann hat es abzählbare Modelle.

Beweis.

Sei M = <D, V> ein unendliches Modell von Γ und sei A_k eine Formel, die besagt, dass es mindestens k Individuen gibt.

zB. $A_3 = (\exists x_1)(\exists x_2)(\exists x_3)[\sim x_1 = x_2 \wedge \sim x_2 = x_3 \wedge \sim x_1 = x_3]$

Da <D, V> ein unendliche Modell ist, ist es auch ein Modell von $\Gamma \cup \{A_1, A_2, \ldots\}$.

Δ ist also simultan erfüllbar. Def. von sim. Erfüllbarkeit.

Also ist Δ auch konsistent. Korrektheit von $H_{P=}$

Sei M' eine S-Erweiterung von M.

Dann gibt es eine M'-gesättigte Menge Θ mit $\Delta \subseteq \Theta$.

Jede M'-gesättigte Menge hat ein Modell <D', U>, und zwar eines, dessen Domäne D' aus den Individuentermen von M' besteht.

Davon gibt es aber nur abzählbar unendlich viele.

Also ist <D', U> höchstens abzählbar.

Wegen $A_k \in \Theta$, k≥1, muss <D', U> mindestens abzählbar unendlich sein.

Also ist das Modell <D', U> abzählbar unendlich. <D', U> ist auch ein Modell von Γ.

Man kann noch etwas Stärkeres zeigen:

Eine Theorie hat ein abzählbares Modell gdw sie ein Modell in jeder unendlichen Kardinalzahl hat.

Man kann, wie schon erwähnt, die Mengenlehre in der Prädikatenlogik 1. Stufe mit Identität formalisieren (axiomatische Mengenlehre!)

Ein Theorem der Mengenlehre besagt, dass es überabzählbar grosse Mengen gibt (die also nicht in eine 1-1 Anordnung mit den natürlichen Zahlen gesetzt werden können).

Das Löwenheim-Skolem-Theorem besagt aber, dass wenn die Mengentheorie ein unendliches - z.B. überabzählbares - Modell hat, dass es dann auch ein abzählbares Modell geben muss. (Löwenheim-Skolem-"Paradox"!)