11. Sitzung

Korrektheit und Vollständigkeit von $H_{P=}$

Nachdem wir nun $H_{P=}$ unter beweistheoretischem und semantischem Aspekt untersucht haben, wollen wir - wie schon bei H_S - nun zeigen, dass diese beiden Seiten von $H_{P=}$ nicht vollkommen unabhängig voneinander sind, sondern dass sie in einer gewissen Beziehung zueinander stehen, nämlich dass z.B. Beweisbarkeit und Gültigkeit von Formeln *extensional* äquivalent sind (d.h. die gleichen Formeln sind beweisbar und gültig). Vieles, was wir hier zeigen, kennen wir schon aus dem Beweis der Adäquatheit von H_S. Aber es gibt auch einige Unterschiede zwischen diesen beiden Systemen.

1. Korrektheit von $H_{P=}$

Folgende Metatheoreme besagen, dass das System $H_{P=}$ korrekt ist (wenn nicht anders vermerkt, beziehen sich die Nummern der Metatheoreme auf Kapitel XII in Thomason 1970):

M3. Wenn $\vdash A$, dann $\models A$.

M4. Wenn $\Gamma \vdash A$, dann $\Gamma \models A$.

M5. Wenn Γ simultan erfüllbar ist, dann ist Γ konsistent.

Die Beweise dieser Metatheoreme gehen analog zu denen über H_S.

M3 zeigt man, indem man zeigt, dass alle Axiome logisch gültig sind und dass Modus Ponens die Gültigkeit seiner Prämissen auf die Konklusion vererbt. Also ist jede Zeile in einem Beweis von $H_{P=}$ logisch gültig, insbesondere die letzte Zeile.

M4 und M5 werden exakt so bewiesen, wie die entsprechenden Metatheoreme über H_S, und wir werden sie deshalb hier nicht noch einmal aufführen.

2. Vollständigkeit von $H_{P=}$

Auch hier ist der Beweis der Vollständigkeit der schwierigere Teil und die Struktur des Beweises ist ganz analog zum Vollständigkeitsbeweis von H_S.

Hier nochmals die entsprechenden Metatheoreme, in der (logischen) Reihenfolge ihrer Beweise:

M17. Wenn Γ konsistent ist, dann ist Γ simultan erfüllbar.

M19. Wenn $\Gamma \models A$, dann $\Gamma \vdash A$.

M21. Wenn $\models A$, dann $\vdash A$.

(wobei Γ eine Menge von Formeln einer Morphologie M für $H_{P=}$ ist, und A eine Formel von M)

Auch hier liegt die Hauptlast des Beweises auf dem Beweis von M17. M19 und M21 sind dann relativ einfache Korollare von M17.

Und - ähnlich wie bei H_S - ist die Struktur des Beweises von M17 die folgende:

Γ ist konsistent $\Rightarrow$ Γ wird erweitert zu einer M'-gesättigten Menge Γ $\Rightarrow$ Γ erweist sich als simultan erfüllbar $\Rightarrow$ damit ist auch Γ (als Untermenge von Γ) simultan erfüllbar.

Wir brauchen also auch hier wieder

(a) eine Definition einer maximal konsistenten Menge

(b) ein Theorem, dass jede konsistent Menge Γ zu solch einer maximal konsistenten Menge Γ erweitert werden kann, und

(c) ein Theorem, dass jede maximal konsistente Menge simultan erfüllbar ist.

Soweit also zu den Gemeinsamkeiten der Vollständigkeitsbeweise für die beiden Systeme H_S und $H_{P=}$.

Nun jedoch zu den Unterschieden!

Der erste Unterschied liegt im Begriff einer maximal konsistenten Menge für die Prädikatenlogik. Der aufmerksame Leser hat sicher bemerkt, dass oben - bei der Angabe der groben Struktur des Vollständigkeitsbeweises - von M'-gesättigten Mengen die Rede war, und nicht von M-gesättigten Mengen, obwohl wir ja ausgingen von einer konsistenten Menge Γ einer Morphologie M. Es findet also ein Morphologie-Wechsel (besser: Morphologie-Erweiterung) statt!

Doch zunächst wollen wir uns überlegen, was wir von einer maximal konsistenten Menge in der Prädikatenlogik verlangen.

Sie müssen sicher - wie in H_S - folgende Eigenschaften haben:

(a) $\sim A \in \Gamma$ gdw $A \notin \Gamma$.

(b) $A \supset B \in \Gamma$ gdw $A \notin \Gamma$ oder $B \in \Gamma$.

Dies sagt also etwas aus über die Elementschaft bzw. Nicht-Elementschaft von komplexen Formeln der Art Negation und Konditional und ihren Komponenten.

Wie steht es nun mit der dritten Art von komplexen Formeln, $(x)A^x/_u$?

1. Versuch: $(x)A^x/_u \in \Gamma$ gdw $A \in \Gamma$

(in einer gewissen Analogie zur Negation)

Dies kann sicher nicht genügen, da A ja nur *eine* Instanz von $(x)A^x/_u$ ist.

2. Versuch: $(x)A^x/_u \in \Gamma$ gdw $A^t/_u \in \Gamma$, für alle $t \in T_M$

(d.h. ein Allsatz ist in einer maximal konsistenten Menge Γ gdw jede seiner Instanzen in Γ ist.)

Dies ist intuitiv schon wesentlich besser, genügt aber immer noch nicht, da man sich - wie in früheren Sitzungen schon öfters erwähnt - folgenden Fall für eine konsistente Menge Γ vorstellen kann:

$\Gamma = \{ \ldots, A^{t1}/_u, A^{t2}/_u, A^{t3}/_u, , \ldots, \sim(x)A^x/_u, \ldots \}$

d.h. alle Instanzen von $(x)A^x/_u$ sind in Γ, aber trotzdem ist $(x)A^x/_u \notin \Gamma$.

Dies ist insbesondere dann der Fall, wenn nicht jedes Ding im Universum D einen Namen hat!

Deshalb:

3. Versuch:

Wir dürfen nur Fälle betrachten, in denen dies nicht vorkommt. D.h. wir betrachten nur Fälle, wo alles einen Namen hat, d.h. von mindestens einem Term $t \in T_M$ bezeichnet wird.

Also werden wir folgende Definition für M-gesättigte Mengen annehmen:

D1. Sei Γ eine Menge von Formeln einer Morphologie M für $H_{P=}$.

Γ ist M-gesättigt gdw

(1) Γ ist konsistent.

(2) Für alle Formeln A von M, $A \in \Gamma$ oder $\sim A \in \Gamma$.

(3) wenn $A^t/_u \in \Gamma$, für alle $t \in T_M$, dann $(x)A^x/_u \in \Gamma$.

Da es aber durchaus sein kann, dass wir - beim Beweis von M17 - von einer konsistenten Menge

$\Gamma = \{ \ldots, A^{t1}/_u, A^{t2}/_u, A^{t3}/_u, , \ldots, \sim(x)A^x/_u, \ldots \}$

d.h. alle Instanzen von $(x)A^x/_u$ sind in Γ, aber trotzdem ist $(x)A^x/_u \notin \Gamma$.

ausgehen (wo also nicht alles einen Namen hat), müssen wir bei unserer Erweiterung von Γ zu einer maximal konsistenten Menge Γ^* zunächst dafür sorgen, *dass* alles einen Namen hat.

D.h. wir müssen die Morphologie M um weitere Namen erweitern.

Wir nennen dies eine S-Erweiterung, und sie besteht in folgendem:

Wir nehmen zur Morphologie M eine abzählbar unendliche Menge neuer Terme hinzu und bekommen somit eine neue Morphologie M'.

D2. Sei M einer Morphologie für $H_{P=}$ (wobei F_M abzählbar ist), und seien $u_1, u_2, u_3, \ldots$ verschiedene Symbole, die in keiner Kategorie von M vorkommen. Sei M' wie M, ausser dass $IP_{M'} = IP_M \cup \{u_1, u_2, u_3, \ldots\}$. Dann nennen wir M' eine *S-Erweiterung* von M.

Hier ist ein wichtiges Metatheorem:

M12. Wenn

(a) für alle Formeln A von M gilt: $A \in \Gamma$ oder $\sim A \in \Gamma$;

(b) Γ konsistent ist; und

(c) für alle Formeln A, Individuenparameter u und Individuenvariablen x von M, wo u frei ist für x in A, es einen Term t von M gibt mit $(\exists x)A^x/_u \supset A^t/_u \in \Gamma$,

dann ist Γ M-gesättigt.

(Beweis in der Vorlesung)

Die Bedeutung von M12 ist, dass die Bedingung (c) gewissermassen nur eine alternative Formulierung für die 3. Bedingung in Definition D1 (M-gesättigte Menge) ist, die besagt, dass alles einen Namen haben muss. Es bringt aber insofern etwas Neues, weil es uns ein Mittel in die Hand gibt, Situationen, in denen nicht alles einen Namen hat, umzuwandeln in Situationen, in denen alles durch mindestens einen Term bezeichnet wird. Es sind genau die Konditionale von der Form $(\exists x)A^x/_u \supset A^t/_u$, die dies ermöglichen.

Wir können nämlich die 3. Bedingung der M-Gesättigtheit ("alles hat einen Namen") erfüllen, wenn wir für jede Formel A von M Konditionale der Form $(\exists x)A^x/_u \supset A^t/_u$ zu der konsistenten Ausgangsmenge Γ hinzufügen, wobei t ein **neuer** Term sein muss, d.h. ein Term, der bisher in keiner Formel von Γ und den schrittweisen Erweiterungen von Γ, wie gleich gezeigt wird, vorkommt.

1. Stufe der Erweiterung von Γ zu einer maximal konsistenten Menge

Wir nehmen also - als 1. Stufe der Erweiterung von Γ zu einer maximal konsistenten Menge - für jede Formel A von M solch einen Konditional von der Form $(\exists x)A^x/_u \supset A^t/_u$, mit einem neuen Term t, zu Γ hinzu.

Insbesondere nehmen wir hierzu eine Aufzählung aller Formeln der Form $(\exists x_i)A^{x_i}/_{u_i}$ an:

$$(\exists x_0)A^{x_0}/_{u_0} \quad (\exists x_1)A^{x_1}/_{u_1} \quad (\exists x_2)A^{x_2}/_{u_2} \quad \dots \quad (\exists x_n)A^{x_n}/_{u_n} \dots$$
$$B_0 \qquad B_1 \qquad B_2 \qquad B_n$$

und bilden der Reihe nach die entsprechenden Konditionale von besagter Form und fügen sie zu Γ hinzu:

$(\exists x_0)A^{x_0}/_{u_0} \supset A^{v_0}/_{u_0}$, wobei v_0 ein neuer Term ist, der in Γ und B_0 nicht vorkommt;

$(\exists x_1)A^{x_1}/_{u_1} \supset A^{v_1}/_{u_1}$, wobei v_1 ein neuer Term ist, der in Γ, B_0 oder B_1 nicht vorkommt;

...

Dies schliesst Situationen der Art

$\Gamma = \{ \dots, A^{t_1}/_u, A^{t_2}/_u, A^{t_3}/_u, , \dots, \sim(x)A^x/_u, \dots \}$

d.h. alle Instanzen von $(x)A^x/_u$ sind in Γ, aber trotzdem ist $(x)A^x/_u \notin \Gamma$

aus, denn jetzt ist auch ein Konditional von der Form $(\exists x)B^x/_u \supset B^t/_u$ in Γ, nämlich:

$\Gamma = \{ \dots, A^{t_1}/_u, A^{t_2}/_u, A^{t_3}/_u, , \dots, \sim(x)A^x/_u, \dots,$
$(\exists x)\sim A^x/_u \supset \sim A^t/_u, \dots \}$

und weil $\sim(x)A^x/_u$ äquivalent mit $(\exists x)\sim A^x/_u$ ist, folgt mit Modus Ponens, dass es mindestens eine negative Instanz, $\sim A^t/_u$, in Γ gibt, was ja bedeutet, dass nicht alle Dinge die von A ausgedrückte Eigenschaft besitzen, also $\sim(x)A^x/_u$.

Also sieht Γ jetzt so aus:

$\Gamma = \{ \dots, A^{t_1}/_u, A^{t_2}/_u, A^{t_3}/_u, , \dots, \sim(x)A^x/_u, \dots,$
$(\exists x)\sim A^x/_u \supset \sim A^t/_u, \dots, \sim A^t/_u, \dots \}$

Zudem kann die negative Instanz, $\sim A^t/_u$, nicht in Widerspruch zu einem der positiven Instanzen, $A^{t_i}/_u$, stehen, da ja t ein ganz neuer Term (Individuenparameter) ist, der vorher in keiner Formel von Γ vorkam.

Übrigens: M58 aus Kapitel X zeigt, dass durch die Hinzufügung dieser Konditionale eine bestehende Konsistenz erhalten bleibt!

2. Stufe der Erweiterung zu einer maximal konsistenten Menge

Für die 2. Stufe der Erweiterung von Γ zu einer M'-gesättigten Menge, müssen wir nun Γ - das ist die Erweiterung von Γ durch alle Konditionale der Form $(\exists x)B^x/_u \supset B^t/_u$ - noch negationsvollständig machen.

Hierzu gehen wir ganz genau so vor wie bei unserem Vollständigkeitsbeweis von H_S:

Wir ordnen zunächst die Formeln von Γ alphabetisch an.

Sei Γ' eine konsistente Menge von Formeln von M', und sei $A_0, A_1, A_2, \dots$ die alphabetische Anordnung der Formeln von M'.

Wir definieren nun induktiv eine Folge von Mengen $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2, \dots$ wie folgt:

$\Gamma_0 = \Gamma$

und die Glieder der Folge werden auf folgende Weise konstruiert:

Sei $\Gamma_{i+1} = \Gamma_i \cup \{A_i\}$, wenn $\Gamma_i \cup \{A_i\}$ konsistent ist, und $\Gamma_{i+1} = \Gamma_i \cup \{\sim A_i\}$ sonst.

Die Vereinigung Γ^* aus diesen Γ_i kann dann, wie in H_S, ebenfalls konsistent und negationsvollständig gezeigt werden.

Dies beendet den Beweis, dass eine konsistente Menge Γ einer Morphologie M zu einer maximal konsistenten Menge Γ^* einer Morphologie M' erweitert werden kann, wobei M' eine S-Erweiterung von M ist.

Zum Abschluss des Vollständigkeitsbeweises müssen wir jetzt noch zeigen, dass eine M-gesättigte Menge der Prädikatenlogik simultan erfüllbar ist.