10. Sitzung

Formale Semantik von $H_{p=}$

Wir müssen nun die - zunächst als uninterpretiert eingeführte - Sprache der Prädikatenlogik 1. Stufe mit Identität interpretieren, d.h. jeden wohlgeformten Ausdruck mit einer Bedeutung versehen.

In dieser Logik kann man - mit den Termen - auf Objekte referieren und - mit den Prädikatenparametern verschiedener Stelligkeit - diesen Objekten Eigenschaften und Relationen entsprechender Stelligkeit zuschreiben. Dies ist der Grund, warum wir - neben den zwei Wahrheitswerten - eine nicht-leere Diskurswelt, D, von Individuen zugrundelegen. Eigenschaften (1-stellige Relationen) werden dabei als Untermengen von D aufgefasst (nämlich die Menge der Individuen, die diese Eigenschaft besitzen, informell gesprochen) und 2- und mehrstellige Relationen als Untermengen des 2- oder mehrfachen Kartesischen Produktes über D (nämlich die Menge der geordneten Paare oder -allgemein - n-Tupel, die in der entsprechenden Relation zueinander stehen).

D1. Eine i-stellige Relation ($i \geq 1$) über einer Diskurswelt D ist eine Untermenge des kartesischen Produkts D^i.

D2. Sei D eine nicht-leere Menge und M eine Morphologie für $H_{p=}$. Eine *Belegung einer Morphologie* M *für* $H_{p=}$ *über der Diskurswelt* D ist eine Funktion V wie folgt:

1. Für jeden Term t von M, $V(t) \in D$.
2. Für jeden 0-stelligen Prädikatenparameter (d.h. Satzparameter) P von M, $V(P) \in \{W,F\}$.
3. Für jeden i-stelligen Prädikatenparameter Q ($i \geq 1$) von M, $V(Q)$ ist Untermenge von D^i.

Terme müssen also Individuen bezeichnen, Satzparameter einen Wahrheitswert, und i-stellige Prädikatenparameter eine i-stellige Relation. Innerhalb dieser Grenzen kann eine Belegung V beliebig festgelegt werden.

Variantenbelegung

D3. Sei V eine Belegung einer Morphologie M für $H_{p=}$ über einer Diskurswelt D und sei $u \in IP_M$ und $d \in D$. Dann ist $V^d/_u$ eine Belegung wie V, mit dem möglichen Unterschied dass $V^d/_u$ an der Stelle u den Wert d zugewiesen bekommt. D.h. $V^d/_u(u) = d$. ("Semantische Substitution")

Wir nennen $V^d/_u$ eine Variante von V. Solche Variantenbelegungen werden wir für die Wahrheitsdefinition von generellen (d.h. quantifizierten) Formeln benötigen.

Beispiel: $D = \{0, 1\}$

$IP_M = \{u, v, w, u_1, ...\}$, P sei ein 1-stelliger Prädikatenparameter

	u	v	w	u_1	...	P	...
V	0	0	1	0	...	{0}	...
$V^0/_w$	0	0	0	0	...	{0}	...

Man kann diese Variantenbildung auch iterieren, d.h. eine Variante einer Variante bilden, wie z.B. in $V^d/_u{}^e/_v$ wobei $d,e \in D$ und $u, v \in IP_M$.

Der semantische Wert von Formeln einer Morphologie M für $H_{p=}$ wird nun rekursiv wie folgt bestimmt:

Atomare Formeln

D4. Sei V eine Belegung einer Morphologie M für $H_{p=}$ über einer Diskurswelt D und sei A eine atomare Formel von M. Falls A ein Satzparameter von M ist, dann ist der Wahrheitswert von A schon durch D2 bestimmt. Sonst gilt folgendes:

1. $V(Pt_1 \ldots t_n) = W$ gdw $\langle V(t_1), \ldots, V(t_n)\rangle \in V(P)$.
2. $V(s = t) = W$ gdw $V(s) = V(t)$.

Komplexe Formeln

D5. Sei V eine Belegung einer Morphologie M für $H_{p=}$ über einer Diskurswelt D. Der Wahrheitswert einer komplexen Formel von M wird gemäss folgender semantischer Regeln bestimmt:

1. $V(\sim A) = W$ gdw $V(A) = F$.
2. $V(A \supset B) = W$ gdw $V(A) = F$ oder $V(B) = W$.

Die Konnektive werden also hier genauso definiert wie in der Aussagenlogik, H_S.

Überlegen wir nun, wie die Wahrheit einer universellen Formel, $(x)A^x/_u$, definiert werden kann. Die Formel $(x)A^x/_u$ wurde aus der Formel A gewonnen, ähnlich wie $\sim A$ aus A gewonnen wurde. Doch während der Wahrheitswert von $\sim A$ nur vom Wahrheitswert ihrer Komponente A abhängt, zeigt ein einfaches Beispiel, dass der Wahrheitswert von $(x)A^x/_u$ nicht einfach vom Wahrheitswert ihrer Komponente A abhängen kann.

$(x)Px$ sei aus der Formel Pu gewonnen.

Zwar wissen wir, dass $(x)Px$ falsch ist, wenn Pu falsch ist, aber die Wahrheit von Pu garantiert noch lange nicht die Wahrheit von $(x)Px$.

Nehmen wir z.B. V wie oben definiert. Dann gilt $V(Pu) = W$, wir wollen jedoch, dass $V((x)Px) = F$, da ja nicht alle Objekte in D die von P ausgedrückte Eigenschaft haben ($1 \notin \{0\}$!)

Die Wahrheit von Pu sagt also nichts über die Wahrheit von $(x)Px$ aus.

Was wir brauchen ist folgendes: die Formel $(x)Px$ ist wahr wenn Pu wahr ist, **egal was der Individuenparameter u denotiert** - also egal welches Individuum aus D u bezeichnet.

Um dieses "egal welchen Wert u annimmt" formal zu fassen, benötigen wir den Begriff der Variantenbelegung.

Wir bekommen also folgende Wahrheitsdefinition für universelle Formeln:

3. $V((x)A^x/_u) = W$ gdw für alle $d \in D$, $V^d/_u(A) = W$.

(Diese "objektuale" Wahrheitsdefinition von Allaussagen sollte man sehr wohl von der folgenden unterscheiden:

3*. $V((x)A^x/_u) = W$ gdw für alle $t \in T_M$, $V(A^t/_u) = W$.

Hier wird die Wahrheit einer universellen Formel über die Instanzen definiert. Dies geht nur, wenn jedes Objekt von einem Term bezeichnet wird - eine nicht-triviale Forderung, wenn man überabzählbare Universen in Betracht zieht.)

Aus der Definition der Konnektive und des Existenzquantors ergeben sich dann folgende Wahrheitsdefinitionen für die entsprechenden Formeln:

$V(A \vee B) = W$ gdw entweder $V(A) = W$ oder $V(B) = W$.

$V(A \wedge B) = W$ gdw sowohl $V(A) = W$ als auch $V(B) = W$.

$V(A \equiv B) = W$ gdw $V(A) = V(B)$.

$V((\exists x)A^x/_u) = W$ gdw für mindestens ein $d \in D$, $V^d/_u(A) = W$.

Definition einiger semantischer Begriffe.

D6. Eine Formel A von M ist *erfüllbar* wenn es eine nicht-leere Diskurswelt D und eine Belegung V von M über D gibt, so dass gilt: $V(A) = W$.

D7. Eine Formel A von M ist *gültig* wenn für jede nicht-leere Diskurswelt D und jede Belegung V von M über D gilt: $V(A) = W$.

D8. Sei Γ eine Menge von Formeln einer Morphologie M für $H_{p=}$ und sei V eine Belegung von M über D. Die Belegung V *erfüllt* Γ *simultan*, wenn V jede Formel in Γ erfüllt. Man sagt in diesem Fall auch, dass V ein *Modell von* Γ ist. (Üblich - aber nicht in Thomason 1970 - ist auch die Schreibweise: das Paar $\mathfrak{M} = \langle D, V\rangle$ ist Modell von Γ, oder abgekürzt: $\langle D,V\rangle$ Mod Γ.)

D9. Sei Γ eine Menge von Formeln einer Morphologie M für $H_{p=}$. Dann ist Γ *simultan erfüllbar*, wenn es eine nicht-leere Diskurswelt D und eine Belegung V von M über D gibt, die Γ simultan erfüllt. (Eine Menge von Formeln ist also simultan erfüllbar, wenn sie mindestens ein Modell hat.)

D10. Sei Γ eine Menge von Formeln einer Morphologie M für $H_{p=}$ und sei A eine Formel von M.

Γ *impliziert logisch* A (A folgt logisch aus Γ, $\Gamma \vdash A$) wenn für jede nicht-leere Diskurswelt D und jede Belegung V von M über D, die Γ simultan erfüllt, gilt, dass V auch A erfüllt.

(Eine Menge von Formeln Γ impliziert also logisch eine Formel A, wenn A in jedem Modell von Γ wahr ist.)

Neben diesen absoluten Begriffen ist es nützlich, auch die entsprechenden, auf ein festes D eingeschränkten Begriffe zu haben.

D11. Eine Formel A einer Morphologie M für $H_{p=}$ ist *erfüllbar in* D, wobei D eine nicht-leere Diskurswelt ist, wenn es eine Belegung V von M über D gibt so dass gilt: $V(A) = W$.

(Analoge Definitionen kann man für Gültigkeit, simultane Erfüllbarkeit und logische Folgerung einführen.)

Die absoluten und auf ein bestimmtes D relativierten Begriffe unterscheiden sich. So ist z.B. $(\exists x)(\exists y)\sim x=y$ erfüllbar, aber nicht erfüllbar in $D = \{1\}$, und $(x)(y)((Px \& Py) \supset x=y)$ ist gültig in $D = \{1\}$ aber nicht gültig. Man sieht weiterhin leicht ein, dass $(\exists x)(\exists y)\sim x=y$ nicht nur in $D = \{1\}$ nicht erfüllbar ist, sondern in jeder 1-elementigen Diskurswelt. Es kommt also nur auf die Anzahl der Elemente einer Diskurswelt D an, und nicht auf ihre speziellen Elemente, ob eine Formel in ihr z.B. gültig ist. Dies ist die Bedeutung von M11:

M11. Wenn D und D´ nicht-leere Bereiche mit derselben Mächtigkeit sind, dann ist *A* erfüllbar in D gdw *A* ist erfüllbar in D´.

(Analoges gilt für die anderen semantischen Begriffe. Siehe M30 (simultane Erfüllbarkeit in D) und M31 (logische Implikation in D).)

Man kann also in der Prädikatenlogik nicht über spezielle Bereiche reden, sondern nur über eine Klasse *isomorpher* Strukturen! (Zum Begriff der Isomorphie siehe Definition D10 auf dem Handout "Semantische Definitionen und Metatheoreme von $H_{p=}$".)

Obwohl Belegungen *unendliche* Funktionen sind, kann man beweisen, dass für die Bewertung einer (Menge von) Formel(n) nur die Einschränkung der Belegung auf die Terme und Satz- und Prädikatenparameter einer Morphologie M, die in der (Menge von) Formel(n) tatsächlich vorkommen, relevant ist. Wir müssen also bei unseren Beispielen nur einen endlichen Ausschnitt einer Belegung betrachten.

Schliesslich gilt, dass syntaktische und semantische Substitution denselben Effekt haben:

M32. Für alle Interpretationen V über einem Bereich gilt: $V(A^t/u) = V^{V(t)/u}(A)$.

Einige Bemerkungen zum Modellbegriff

Die oben gegebene Semantik für $H_{p=}$ bezeichnet man auch oft als modelltheoretische Semantik.

Wir gehen aus von einer Menge Γ von Formeln von M für $H_{p=}$. Solch eine Menge von Formeln kann ganz verschieden interpretiert werden. Alle Interpretationen, die die Formelmenge Γ simultan erfüllen, bezeichnen wir als Modelle dieser Menge Γ.

Die Modelltheorie ist eine mathematische Theorie, die untersucht, wie variabel die Modelle einer - z.B. - axiomatischen Theorie sind, d. h. wie verschieden die Modelle sein können, die von einer Theorie umfasst werden, ihre Variationsbreite.

Z.B. besteht die Theorie der strikten Halbordnungen aus folgender Menge von Postulaten oder Axiomen:

$$sHO = \{(x)(y)(z)((Pxy \supset (Pyz \supset Pxz)),\ (x)(y)(Pxy \supset \sim Pyx)\}$$

(d.h. Transitivität und Asymmetrie)

Die verschiedensten Strukturen erfüllen diese Postulate.

Z.B. $<\mathbb{N}, <>$ (unendlich, ein kleinstes aber kein grösstes Element, linear)

$<\{ ..., -2, -1\}, <>$ (unendlich, kein kleinstes, aber ein grösstes Element, linear)

<{1, 2, 5, 10}, ist-echter-Teiler-von> (endlich, kleinstes und grösstes Element, verzweigend)

und viele mehr.

Der Implikationsbegriff, andererseits, sagt uns, worauf uns eine Menge von Postulaten, Γ, festlegt:

$$\Gamma \vdash A$$

In allen Modellen von Γ gilt nämlich auch *A*. Wählt man Γ, so legt man sich "implizit" auf *A* fest.

Z.B. folgt aus der Theorie der strikten Halbordnungen die Irreflexivität:

$$sHO \vdash (x)\sim Pxx$$

Also gilt: alle sHO sind irreflexiv!

Interessant ist, dass wir - was vorher schon angedeutet wurde - durch eine Postulatenmenge von $H_{p=}$ nie einen bestimmten Bereich, z.B. die natürlichen Zahlen, charakterisieren können, sondern immer nur bis zu Isomorphie.

Eine Formelmenge, die nur die natürlichen Zahlen charakterisiert, gibt es nicht. Sie würde immer auch alle isomorphen Strukturen beschreiben (und sogar nicht-isomorphe [Löwenheim-Skolem-Paradox]).

Übungsaufgaben:

(werden noch bekanntgegeben)