9. Sitzung

Natürliches Schliessen in der Prädikatenlogik 1. Stufe mit Identität: Das System $S_{P=}$

Das System $S_{P=}$ ist eine Erweiterung des Systems S_S für die Aussagenlogik. Es besteht aus den 12 Regeln für aussagenlogische Derivationen - natürlich jetzt angewandt auf Formeln der Prädikatenlogik - plus den folgenden 6 Regeln. (Ausserdem setzen wir natürlich Begriffe wie Derivation, Derivationslinie, Item, Subderivation, etc., die wir in der 2. Sitzung für das System S_S eingeführt haben, hier voraus.)

uq intro - "Allquantor-Introduktion" oder "All-Einführung" (auch: All-Generalisierung)

uq elim - "Allquantor-Eliminierung" (auch: All-Spezifizierung oder All-Instantiierung)

eq intro - "Existenzquantor-Introduktion" oder "Existenz-Einführung" (auch: Existenz-Generalisierung)

eq elim - "Existenzquantor-Eliminierung" (auch: Existenz-Instantiierung)

=intro - "Identitäts-Introduktion" oder "Identitäts-Einführung"

=elim - "Identitäts-Eliminierung"

(Man sieht also, dass für jede der drei zusätzlichen logischen Konstanten der Prädikationlogik, (x), $(\exists x)$ und =, je eine Introduktions- und eine Eliminierungsregel gebraucht wird.)

Folgende Konventionen werden verwendet für Metavariable:

x, y, z...	für Individuenvariablen
s, t, t_1...	für Terme allgemein (d.h. für Individuenkonstanten und -parameter)
u, v, w ...	für Individuenparameter (für sogen. "willkürlich gewählte Individuen")
A, B, C ...	für Formeln (Aussagen) allgemein
P, Q, R ...	für i-stellige Prädikatenparameter, i≥0, (manchmal zur Verdeutlichung auch P^i, ...)

Wie üblich verstehen wir unter $A^t/_u$ bzw. $A^x/_u$ das Resultat der Ersetzung jedes Vorkommens des Individuenparameters u in der Formel A durch den Term t oder die Variable x.

Im folgenden also die neuen Regeln, für die im übrigen dieselben Beschränkungen gelten wie im System S_S.

Regeln für den All-Quantor

Regel der Allquantor–Introduktion (uq intro)

Wenn man in einer Derivation $\mathcal{D}$ zeigen kann, dass A, für ein beliebiges Individuum u (hinter einer mit u beflaggten Linie), dann kann man zu einem späteren Zeitpunkt eine Allquantifizierung von A, $(x)A^x/_u$, in der Derivation $\mathcal{D}$ hinschreiben.

Regel der Allquantor–Eliminierung (uq elim)

Wenn man in einer Derivation $\mathcal{D}$ eine universelle Formel, $(x)A^x/_u$, hat, so kann man zu einem späteren Zeitpunkt eine beliebige Instanz dieser Formel, $A^t/_u$, in der Derivation $\mathcal{D}$ hinschreiben.

Schematische Darstellung der Regeln für den All-Quantor

i	$(x)A^x/_u$				u		
	⋮			i	⋮		
j	$A^t/_u$	i, uq elim			A		
					⋮		
				j	$(x)A^x/_u$	i, uq intro	

Bemerkung zu uq intro: Die Formel A muss hinter einer "Barriere" mit der "Flagge" u gewonnen werden. Diese mit u beflaggte Barriere soll verhindern, dass durch sie hindurch Formeln, in denen u vorkommt reiteriert oder sonstwie eingeführt werden. Weiterhin ist klar, dass $(x)A^x/_u$, die Konklusion der Regel, keine Vorkommen von u enthält. Intuitiv bedeuten diese Beschränkungen, dass man eben keine speziellen Annahmen über dieses "willkürlich gewählte Individuum u" "einschmuggeln" darf, und dass der willkürlich gewählte Term auch wieder beseitigt werden muss. u ist eben nur ein temporärer Name für ein willkürlich gewähltes Objekt aus der Diskurswelt.

Regeln für den Existenz-Quantor

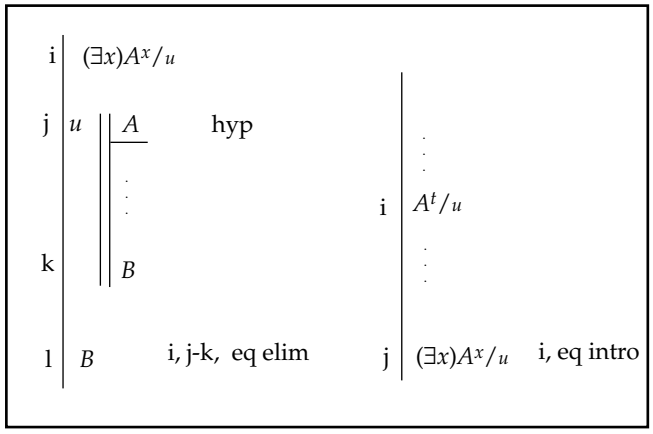
Regel der Existenzquantor–Introduktion (eq intro)

Wenn man in einer Derivation $\mathcal{D}$ eine beliebige Instanz, $A^t/_u$, einer existenziellen Formel, $(\exists x)A^x/_u$, hat, dann kann man zu einem späteren Zeitpunkt diese existenzielle Formel, $(\exists x)A^x/_u$, in der Derivation $\mathcal{D}$ hinschreiben.

Regel der Existenzquantor–Eliminierung (eq elim)

Wenn man in einer Derivation $\mathcal{D}$ eine existenzielle Formel, $(\exists x)A^x/_u$, hat, und eine Subderivation hinter einer mit u beflaggten Barriere, deren einzige Hypothese A und deren letzte Zeile B ist, so kann man zu einem späteren Zeitpunkt die Formel B in der Derivation $\mathcal{D}$ hinschreiben.

Schematische Darstellung der Regeln für den Existenz-Quantor



Bemerkung zu eq elim: Die Formel B muss hinter einer mit u beflaggten Barriere und in einer hypothetischen Ableitung mit A als einziger Hypothese abgeleitet werden. Die Barriere hat denselben Zweck wie in der Regel uq intro: zu verhindern, dass Formeln, in denen u vorkommt, durch die Barriere "ein- und ausgeführt" werden. Insbesondere darf also die Formel B den "willkürlich gewählten" Term u nicht mehr enthalten. Die Hypothese A ist die Formel, aus der $(\exists x)A^x/_u$ durch existenzielle Quantifizierung gewonnen wurde, die eventuell den "willkürlich gewählten Term" oder Individuenparameter u enthält. Intuitiv soll $u$das Individuum bezeichnen, von dessen Existenz wir wissen (durch $(\exists x)A^x/_u$), dessen Identität wir jedoch nicht kennen. u ist also auch hier wieder ein temporärer Name für solch ein unspezifiziert gelassenes Individuum aus der Diskurswelt.

Barriere und Derivationslinie für die Ableitung von B aus A werden oft zu einer Linie zusammengefasst.

Regeln für die Identität

Regel der =–Introduktion (=intro)

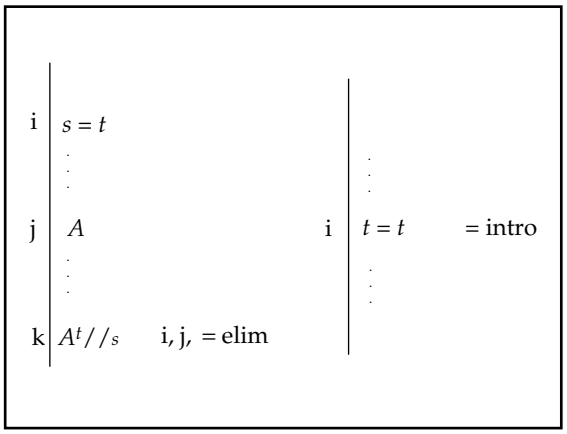
Man kann in einer Derivation $\mathcal{D}$ zu jeder Zeit eine Formel $t = t$ hinschreiben, für einen beliebigen Term t.

Regel der =–Eliminierung (=elim)

Wenn man in einer Derivation $\mathcal{D}$ eine Identitätsformel, $s= t$, und eine Formel A hat, so kann man zu einem späteren Zeitpunkt, die Formel $A^t//_s$, in der Derivation $\mathcal{D}$ hinschreiben.

(wobei $A^t//_s$ ein Resultat der Ersetzung von keinem, einigen oder allen Vorkommen von s in A durch t ist)

Schematische Darstellung der Regeln für die Identität



Beachte, dass = intro eine Regel ohne Prämissen ist.

Deduktive Strategien für Quantoren-Regeln

Zusätzlich zu den Strategien für die Regeln für Konnektive können wir auch für die Quantorenregeln Strategien angeben, die helfen sollen, Formeln einer bestimmten quantorenlogischen Form zu gewinnen oder auszunutzen.

(i) Wenn du einen Allsatz, $(x)A^x/_u$, gewinnen willst, dann versuche zuvor A hinter einer mit u beflaggten Barriere zu gewinnen; dann kann man den Allsatz mit uq intro einführen.

(ii) Wenn du einen Existenzsatz, $(\exists x)A^x/_u$, gewinnen willst, dann versuche zuvor irgendeine Instanz, $A^t/_u$, zu gewinnen; dann kann man den Existenzsatz mit eq intro einführen.

(iii) Wenn du eine Formel B gewinnen willst und die schon gewonnenen Formeln einen Existenzsatz, $(\exists x)A^x/_u$, enthalten, dann versuche B zuvor hinter einer mit u beflaggten Barriere und in einer Subderivation mit A als Hypothese zu gewinnen; dann kann B mit eq elim gewonnen werden.

(iv) Verwende uq elim grosszügig; man kann dabei nicht fehlgehen, höchstens zu viele unnötige Instanzen ableiten.

Beweistheoretische Begriffe von $S_{P=}$

Beweistheoretische Begriffe von $S_{P=}$ - wie z.B. *Beweis*, *Beweisbarkeit*, *Ableitung*, *Ableitbarkeit*, *Konsistenz*, *Inkonsistenz* - sind ganz analog zu denen für S_S und werden hier nicht nochmals aufgeführt. (Siehe Sitzung 2.)

Beispiele für Derivationen in $S_{P=}$

Einige Beispiele sollen die Verwendung der Regeln illustrieren.

(in der Vorlesung gezeigt)

$(x)Px \wedge (x)Qx \vdash (x)Px \wedge (x)Qx$

$(x)[Px \supset Qx]\,,\ (x)\,Px \vdash (x)Qx$

$(\exists x)[Px \wedge Qx] \vdash (\exists x)Px \wedge (\exists x)Qx$

$(\exists x)Px \wedge (\exists x)Qx \nvdash (\exists x)[Px \wedge Qx]$ (Sinn der Barriere!)

$(\exists x)A^x/_u \supset B \vdash (x)[A^x/_u \supset B]$

$(x)[A^x/_u \supset B] \vdash (\exists x)A^x/_u \supset B$

$\vdash (x)\sim A^x/_u \equiv \sim(\exists x)A^x/_u$

$\vdash (\exists x)\sim A^x/_u \equiv \sim(x)A^x/_u$

$\vdash s = t \supset t = s$ (Symmetrie)

$\vdash (s = t \wedge t = r) \supset s = r$ (Transitivität)

Formale Syntax von $H_{P=}$

(i) Die Sprache von $H_{P=}$

D1. Eine *Morphologie* M für $H_{P=}$ ist eine Struktur, die aus folgenden Teilen besteht:

1. Eine unendliche Menge V_M von *Individuenvariablen*. (x, y, z, x_1, ...)
2. Eine unendliche Menge IP_M von *Individuenparametern*. (u, v, w, u_1, ...)
3. Eine Menge C_M von *Individuenkonstanten*. (a,b, c, a_1, ...)
4. Für jedes i ≥ 0, eine Menge P_Mi von i-stelligen *Prädikatenparametern*. (P^i, Q^i, R^i, ...)

(Üblicherweise wird das Superskript hier weggelassen, da sich die Stelligkeit eines Prädikatenparameters aus dem Kontext ergibt. Ein 0-stelliger Prädikatenparameter ist ein Satzparameter.)

(Die in 3. und 4. spezifizierten Mengen können auch leer sein.)

D2. Die Menge T_M der *Terme* einer Morphologie M ist $C_M \cup IP_M$. (s, t, t_1, ...)

D3. Die Menge F_M der *Formeln* einer Morphologie M für $H_{P=}$ wird durch folgende Regeln definiert:

1. Wenn $s, t \in T_M$ ist, dann ist $s = t \in F_M$.
2. Wenn $P \in P_M{}^0$, dann ist $P \in F_M$.
3. Wenn $P \in P_M{}^n$, wobei n > 0, und $t_1, ..., t_n \in T_M$, dann ist $Pt_1 ... t_n \in F_M$.
4. Wenn $A \in F_M$, dann ist $\sim A \in F_M$.
5. Wenn $A, B \in F_M$, dann ist $(A \supset B) \in F_M$.
6. Wenn $A \in F_M$, $x \in V_M$, und $u \in IP_M$, dann $(x)A^x/_u \in F_M$. ("universelle Formel")

($A^x/_u$ ist das Resultat der simultanen Ersetzung aller Vorkommen von u in A durch x; wir nennen (x) den "Allquantor in der Variablen x".)

Formeln nach 1 - 3 heissen *atomare Formeln*, nach 4 und 5 *wahrheitsfunktionale Formeln* und nach 6 *universelle Formeln*.

Konnektive und Quantoren sind *Operatoren*. Der *Hauptoperator* einer Formel bestimmt, um was für eine Formel es sich handelt. Ist z.B. der Hauptoperator von A das Konnektiv $\supset$, so ist A ein Konditional; ist der Hauptoperator von A der Allquantor in der Variablen x, (x), so ist A eine universelle Formel.

Wie in H_S sind $(A \vee B)$, $(A \wedge B)$ und $(A \equiv B)$ Abkürzungen. Hinzu kommt noch eine Abkürzung, $(\exists x)A^x/_u$, für die Formel $\sim(x)\sim A^x/_u$. Wir nennen solche Formeln *existenzielle Formeln*, und $(\exists x)$ den "Existenzquantor in der Variablen x".
(S. Definitionen D13 - D16 auf dem Handout.)

D6. Sei $A \in F_M$, $x \in V_M$, und $u \in IP_M$. Dann ist *u frei für x in A*, wenn kein Vorkommen von u in A in den Bereich (Skopus) eines Allquantors (x) oder eines Existenzquantors $(\exists x)$ fällt. (Wir fordern, dass dies bei einer "Quantifizierung", d.h. bei einer Anwendung der Regel 6 immer der Fall ist.)

D7. Sei $A \in F_M$. Dann ist B eine *universelle Quantifizierung von A*, wenn es ein $u \in IP_M$ und ein $x \in V_M$ gibt, mit u frei für x in A, und B die Formel $(x)A^x/_u$ ist. (Analog für *existentielle Quantifizierung*.)

D8. Sei $A \in F_M$. Die *Universalisierungen von A* sind durch die folgenden Regeln definiert:

1. A ist eine Universalisierung von A.

2. Wenn B eine Universalisierung von A ist, dann ist auch $(x)B^x/_u$ eine Universalisierung von A, wobei $u \in IP_M$, $x \in V_M$ und u frei ist für x in B.

Nichts sonst ist eine Universalisierung von A.

(ii) Der deduktive Apparat von $H_{P=}$

Axiomenschemata:

AS1: $A \supset (B \supset A)$
AS2: $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
AS3: $(\sim A \supset \sim B) \supset (B \supset A)$
AS4: $(x)(A \supset B^x/_u) \supset (A \supset (x)B^x/_u)$
AS5: $(x)(A^x/_u \supset B^x/_u) \supset ((x)A^x/_u \supset (x)B^x/_u)$
AS6: $(x)A^x/_u \supset A^t/_u$
AS7: $t = t$
AS8: $s = t \supset (A \supset A^s//_t)$

Axiome sind Instanzen der obigen Axiomenschemata **plus deren Universalisierungen**. Wir haben also auch hier wieder unendlich viele Axiome.

Regeln:

Es gibt, wie in H_S, eine Regel, nämlich Modus Ponens (mp)

$$\frac{A \quad A \supset B}{B}$$

Für die verschiedenen beweistheoretischen Begriffe, wie z.B. *Beweis*, *beweisbar*, etc. - die im Übrigen unverändert von H_S übernommen werden - verweise ich auf das Handout.

4. Metatheoreme über $H_{P=}$

Wir übernehmen aus Kapitel V die Metatheoreme M1 - M28 und setzen die Numerierung bei M29 fort. (Siehe Handout.)

Also Metatheorem V. M1. $\vdash A \supset A$ heisst jetzt X. M1, etc.

Auch hier gilt wieder - wie in Kapitel V - dass wir durch die Metatheoreme die Bequemlichkeit der Regeln des Natürlichen Schliessens gewissermassen durch die Hintertür wieder einführen.

So entspricht z.B. Metatheorem M29 der Regel uq elim:

M29. Wenn $\Gamma \vdash (x)A^x/_u$, dann $\Gamma \vdash A^t/_u$.

Und M32 entspricht der Regel uq intro:

M32. Wenn $\Gamma \vdash A$ und u ist frei für x in A und kommt in Γ nicht vor, dann $\Gamma \vdash (x)A^x/_u$.

M37 besagt, dass Termsubstitution eine zulässige Regel ist:

M37. Wenn $\vdash A$, dann $\vdash A^s/_t$.

Metatheoreme über die Identität:

M44. Wenn $\Gamma \vdash s = t$ und $\Gamma \vdash A$, dann $\Gamma \vdash A^s//_t$. (entspricht der Regel = elim)

M45. $\Gamma \vdash t = t$

Entspricht der Regel = intro und ergibt sich direkt aus AS7. Es drückt die Reflexivität der Identität aus.

M46. Wenn $\Gamma \vdash s = t$, dann $\Gamma \vdash t = s$. (Symmetrie)

M47. Wenn $\Gamma \vdash r = s$ und $\Gamma \vdash s = t$, dann $\Gamma \vdash r = t$. (Transitivität)

Metatheoreme über den Existenzquantor:

M48. Wenn $\Gamma \vdash A^t/_u$, dann $\Gamma \vdash (\exists x)A^x/_u$. (eq intro)

M49. Wenn $\Gamma \vdash (\exists x)A^x/_u$ und $\Gamma \cup \{A\} \vdash B$, dann $\Gamma \vdash B$. (u frei für x in A und u kommt in B oder Γ nicht vor) (eq elim)

(Beweise in der Vorlesung; auch hier hilft eine Ableitung in $S_{P=}$ bei der Konstruktion der Beweise!)

Sonstige wichtige Metatheoreme:

M52. Wenn $\Gamma \cup \{(\exists x)A^x/_u \supset A^v/_u\} \vdash B$, dann $\Gamma \vdash B$. (u frei für x in A und v kommt in A, B und Γ nicht vor)

M58. Wenn Γ konsistent ist, dann ist $\Gamma \cup \{(\exists x)A^x/_u \supset A^v/_u\}$ auch konsistent. (u frei für x in A und v kommt in A, B und Γ nicht vor)

(Beweis von M58 in der Vorlesung.)

Was ist der Sinn von M58?

Wozu braucht man nun das Metatheorem M58?

Schauen wir etwas voraus auf den Vollständigkeitsbeweis. Auch dort werden wir, um den Zusammenhang zwischen konsistenten und simultan erfüllbaren Mengen herzustellen, konsistente Mengen zu maximal konsistenten Mengen - also Mengen, die konsistent und negationsvollständig sind - erweitern.

In der Prädikatenlogik kann es nun konsistente Mengen Γ geben, die $(\exists x)A^x/_u$ enthalten, aber keine der Instanzen $A^t/_u$ von $(\exists x)A^x/_u$. Dabei kann Γ sogar eine maximal konsistente Menge sein.

Wenn nun in einem solchen Fall Γ maximal konsistent wäre, dann müsste es - wegen der Negationsvollständigkeit - die "negativen Instanzen", $\sim A^{t_i}/_u$, für jeden Term $t_i \in T_M$, enthalten.

$\Gamma = \{ \ldots (\exists x)A^x/_u, \ldots, \sim A^{t_i}/_u, \ldots \}$, für jeden Term $t_i \in T_M$.

Solche Mengen sind, semantisch gesprochen, durchaus simultan erfüllbar, nämlich wenn wir Modelle nehmen, in denen jedes Ding, das die durch A ausgedrückte Eigenschaft besitzt, keinen Namen in M hat. Es gibt also Dinge, die die Eigenschaft A besitzen, aber man kann sie nicht benennen.

Dies wollen wir jedoch bei unserem Beweis der Vollständigkeit von $H_{P=}$ - aus einem noch zu erläuternden Grund - für M-gesättigte Mengen der Prädikatenlogik ausschliessen!

D.h. wir betrachten - für den Vollständigkeitsbeweis - nur Modelle, in denen alles einen Namen hat.

Wenn dann $(\exists x)A^x/_u$ in einer M-gesättigten Menge Γ ist, dann muss es mindestens eine Instanz geben, $A^v/_u$, die auch in Γ enthalten ist.

Wie sorgen wir dafür, das in einem solchen Fall in Γ immer solch ein "witness", $A^v/_u$, enthalten ist?

Natürlich können wir nicht einfach eine beliebige Instanz, $A^t/_u$, zu Γ hinzufügen; denn es könnte ja sein, dass Γ schon $\sim A^t/_u$ enthält. Und damit würde Γ inkonsistent.

Wir müssen also dafür sorgen, dass für diesen "witness", $A^v/_u$, ausgeschlossen ist, dass sich $\sim A^v/_u$ schon in Γ befindet. Dies wird dadurch erreicht, dass wir für v verlangen, dass es ein ganz neuer Term ist, der in Γ bis jetzt noch nicht vorkommt.

Des obigen Rätsels Lösung läuft also auf folgendes hinaus.

Wir fügen für eine Formel A zu dem M-gesättigten Γ einen Konditional der Form $(\exists x)A^x/_u \supset A^v/_u$ hinzu. Enthält Γ nun die Existenzformel, $(\exists x)A^x/_u$, dann ist durch Modus Ponens garantiert, dass es auch die "witness"-Instanz, $A^v/_u$, enthält, und zwar so, dass dieser "witness" nicht mit einer entsprechenden negativen Instanz "kollidieren" kann, da ja v ein ganz neuer Term sein muss, der vorher noch nicht in Γ war.

$\Gamma = \{ \ldots (\exists x)A^x/_u, \ldots, \sim A^{t_i}/_u, \ldots, (\exists x)A^x/_u \supset A^v/_u, \ldots, A^v/_u, \ldots \}$

Da v "neu" ist, kann $A^v/_u$ nicht mit einer der negativen Instanzen, $\sim A^{t_i}/_u$, in Konflikt geraten.

Und unser Metatheorem M58 besagt nun, dass durch Hinzufügung eines solchen Konditionals, $(\exists x)A^x/_u \supset A^v/_u$, zu Γ die Konsistenz der resultierenden Menge erhalten bleibt.

Übungsaufgaben:

(siehe Handout; die eingekreisten Aufgaben)