8. Sitzung

1. Vollständigkeit von H_s (Fortsetzung)

Nochmals kurz zur Auffrischung des Gedächtnisses:

Wir beschlossen die letzte Sitzung mit dem Beweis von

M11. Jede konsistente Menge von Formeln von M kann zu einer M-gesättigten Menge erweitert werden. (Lemma 1)

Dazu nahmen wir an, dass es eine alphabetische Anordnung der Formeln von M

$A_0, A_1, A_2, \ldots$

gibt.

Dann haben wir induktiv eine Folge von Mengen

$\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$

wie folgt definiert:

$\Gamma_0 = \Gamma$

und die Glieder der Folge werden auf folgende Weise konstruiert:

Sei $\Gamma_{i+1} = \Gamma_i \cup \{A_i\}$, wenn $\Gamma_i \cup \{A_i\}$ konsistent ist, und $\Gamma_{i+1} = \Gamma_i \cup \{\sim A_i\}$ sonst.

Wir haben weiterhin festgestellt:

Wenn Γ_i konsistent ist, dann auch Γ_{i+1}. (wg. V. M35)

Dann haben wir die Vereinigung all der Γ_i gebildet:

$\Gamma^* = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \ldots$

Wir mussten dann noch zeigen:

a) Γ^* ist konsistent

b) Γ^* ist negationsvollständig

(um zu zeigen, dass Γ^* M-gesättigt ist)

Zu a) :

Wir wissen, alle Γ_i sind konsistent, per Konstruktion.

1. Sei Γ^* inkonsistent. Annahme
2. Dann gibt es eine endliche Untermenge, $\{B_1, B_2, \ldots, B_k\}$ von Γ^*, die inkonsistent ist. (wg. Kompaktheit)
3. Es gibt ein Glied der Folge der Γ_i , Γ_{k^*} , das alle B_i enthält: $\{B_1, B_2, \ldots, B_k\} \subseteq \Gamma_{k^*}$
4. Γ_{k^*} ist inkonsistent. (wegen Monotonie)
5. Aber Γ_{k^*} muss, per Konstruktion, konsistent sein.

Widerspruch!!

(bis hierhin beim letzten Mal)

Jetzt zeigen wir noch

b) :

Z.z.: für alle Formeln A, entweder $A \in \Gamma^*$ oder $\sim A \in \Gamma^*$.

Dies ist klar wegen der Konstruktion der Γ_i:

entweder $A_i \in \Gamma_{i+1}$ oder $\sim A_i \in \Gamma_{i+1}$

und jede Formel A_i kommt irgendwann in der alphabetischen Aufzählung vor; d.h. es gibt ein i, so dass $A = A_i$.

Schliesslich müssen wir jetzt noch M13 beweisen.

M13. Sei Γ eine M-gesättigte Menge von Formeln von M. Dann gibt es eine Belegung V von M, so dass gilt: $\Gamma = \{A : A$ ist eine Formel von M und $V(A) = W\}$.

Beweis:

Sei Γ eine M-gesättigte Menge von Formeln von M, und sei P ein Satzparameter von M.

Dann sei V die folgende Belegung von M:

Wenn $P \in \Gamma$, dann setzen wir $V(P) = W$, sonst setzen wir $V(P) = F$.

Wir zeigen, durch Induktion über die Komplexität von Formeln A, dass $V(A) = W$ gdw $A \in \Gamma$.

Beweis:

Basis:

Für Formeln mit Grad 0 (d.h. mit 0 Konnektiven), also Satzparameter, gilt die Behauptung wegen der Konstruktion von V:

$V(P) = W$ gdw $P \in \Gamma$.

Induktionsschritt:

Sei die Behauptung wahr für alle Formeln mit weniger als n Konnektiven.

Z.z.: Die Behauptung gilt auch für Formeln mit n Konnektiven.

Sei A eine Formel vom Grad n.

A ist entweder

a) eine Negation: $A = {\sim}B$

oder b) ein Konditional: $A = B \supset C$

Zu a)

z.z. $V({\sim}B) = W$ gdw ${\sim}B \in \Gamma$.

(Rest des Beweises in der Vorlesung)

Zu b)

z.z. $V(B \supset C) = W$ gdw $B \supset C \in \Gamma$.

(Rest des Beweises in der Vorlesung)

Damit haben wir also gezeigt, dass eine M-gesättigte Menge simultan erfüllbar ist.

Damit ist die Vollständigkeit von H_S gezeigt!

Ausgehend von einer konsistenten Menge Γ, haben wir diese zu einer M-gesättigten Menge Γ^* erweitert. Für letztere besagt das Lemma 2, dass sie simultan erfüllbar ist. Da jede Untermenge einer simultan erfüllbaren Menge ebenfalls simultan erfüllbar ist, gilt, dass die ursprüngliche konsistente Menge Γ (wegen $\Gamma \subseteq \Gamma^*$) auch simultan erfüllbar ist.

Zusammenfassend haben wir also (wegen Korrektheit und Vollständigkeit von H_S) folgende Resultate:

M19.	$\vdash A$	gdw	$\mid\!\vdash A$.
M17.	$\Gamma \vdash A$	gdw	$\Gamma \mid\!\vdash A$.
M16.	Γ ist konsistent	gdw	Γ ist simultan erfüllbar.

2. Resultate der Vollständigkeit und Korrektheit von H_S.

Mit diesem Ergebnis lassen sich noch einige wichtige Theoreme beweisen.

1. Das System der Aussagenlogik, H_S, ist konsistent, d.h. es gilt nicht zugleich $\vdash A$ und $\vdash {\sim}A$.

(Beweis in der Vorlesung)

2. Der Begriff der simultanen Erfüllbarkeit ist kompakt, d.h.

Γ ist simultan erfüllbar gdw jede endliche Untermenge Γ von Γ ist simultan erfüllbar.

(Beweis in der Vorlesung)

Und schliesslich, ganz wichtig:

3. Das System H_S ist entscheidbar.

Beweis:

Da z.B. entscheidbar ist, ob $\mid\!\vdash A$. (nämlich mit der Wahrheitstafelmethode), ist - mit M19 - auch entscheidbar, ob $\vdash A$. Stellen wir z.B. fest, dass eine Formel nicht gültig ist, dann wissen wir, dass sie auch nicht beweisbar in H_S ist. (Und Entsprechendes gilt für die Ableitbarkeit, $\Gamma \vdash A$, und die Konsistenz von Mengen.)

Prädikatenlogik 1. Stufe mit Identität

Auch für diese Logik wollen wir uns ein axiomatisches Deduktionssystem, $H_{P=}$, anschauen. Und auch hier wird unser Ziel sein, zu zeigen, dass es korrekt und vollständig - also adäquat - ist. (Vorher werden wir allerdings, wie bei der Aussagenlogik, ein System des natürlichen Schliessens für die Prädikatenlogik einführen.)

Ein Deduktionssystem, wie wir wissen, besteht aus einer formalen Sprache, und einem deduktiven Apparat.

3. Die Sprache der Prädikatenlogik 1. Stufe mit Identität.

Zunächst also zur Sprache der Prädikatenlogik 1. Stufe mit Identität, d.h. zur Sprache des Systems $H_{P=}$.

D1. Eine *Morphologie* M für $H_{P=}$ ist eine Struktur, die aus folgenden Teilen besteht:

1. Eine unendliche Menge V_M von *Individuenvariablen*. (x, y, z, x_1, ...)
2. Eine unendliche Menge IP_M von *Individuenparametern*. (u, v, w, u_1, ...)
3. Eine Menge C_M von *Individuenkonstanten*. (a,b, c, a_1, ...)
4. Für jedes i ≥ 0, eine Menge P_Mi von i-stelligen *Prädikatenparametern*. (P^i, Q^i, R^i, ...)

(Üblicherweise wird das Superskript hier weggelassen, da sich die Stelligkeit eines Prädikatenparameters aus dem Kontext ergibt. Ein 0-stelliger Prädikatenparameter ist ein Satzparameter.)

(Die in 3. und 4. spezifizierten Mengen können auch leer sein.)

D2. Die Menge T_M der *Terme* einer Morphologie M ist $C_M \cup IP_M$. (s, t, t_1, ...)

D3. Die Menge F_M der *Formeln* einer Morphologie M für $H_{P=}$ wird durch folgende Regeln definiert:

1. Wenn $s, t \in T_M$ ist, dann ist $s = t \in F_M$.
2. Wenn $P \in P_M{}^0$, dann ist $P \in F_M$.
3. Wenn $P \in P_M{}^n$, wobei n > 0, und $t_1, ..., t_n \in T_M$, dann ist $Pt_1 ... t_n \in F_M$.
4. Wenn $A \in F_M$, dann ist $\sim A \in F_M$.
5. Wenn $A, B \in F_M$, dann ist $(A \supset B) \in F_M$.
6. Wenn $A \in F_M$, $x \in V_M$, und $u \in IP_M$, dann $(x)A^x/_u \in F_M$. ("universelle Formel")

($A^x/_u$ ist das Resultat der simultanen Ersetzung aller Vorkommen von u in A durch x; wir nennen (x) den *Allquantor in der Variablen x*.)

Wie in der Aussagenlogik führen wir die restlichen üblichen Konnektive durch Definition ein; d.h. '$(A \vee B)$', '$(A \wedge B)$' und '$(A \equiv B)$' sind Abkürzungen für längere Formelnamen (S. D13-15) .

Hinzu kommt jetzt noch folgende Abkürzung:

D16. '$(\exists x)A^x/_u$' $=_{df}$ '$\sim(x)\sim A^x/_u$'

(Wir nennen $(\exists x)$ den *Existenzquantor in der Variablen x*.)

Formeln nach 1 - 3 heissen *atomare Formeln*, nach 4 und 5 *wahrheitsfunktionale Formeln* und nach 6 *generelle* oder *quantifizierte Formeln*.

Konnektive und Quantoren sind *Operatoren*. Der *Hauptoperator* einer Formel bestimmt, um was für eine Formel es sich handelt. Ist z.B. der Hauptoperator von A das Konnektiv $\supset$, so ist A ein Konditional; ist der Hauptoperator von A der Allquantor in der Variablen x, (x), so ist A eine universelle Formel.

D4. Sei $A \in F_M$, $x \in V_M$, und $u \in IP_M$. Dann ist *u frei für x in A*, wenn kein Vorkommen von u in A in den Bereich (Skopus) eines Allquantors (x) oder eines Existenzquantors $(\exists x)$ fällt. (Wir fordern, dass dies bei einer "Quantifizierung", d.h. bei einer Anwendung der Regel 6, immer der Fall ist.)

D5. Sei $A \in F_M$. Dann ist B eine *universelle Quantifizierung von A*, wenn es ein $u \in IP_M$ und ein $x \in V_M$ gibt, mit u frei für x in A, und B die Formel $(x)A^x/_u$ ist. (Analog für *existentielle Quantifizierung*.)

D6. Sei A eine Quantifizierung, d.h. eine Formel der Form $(x)B^x/_u$ oder $(\exists x)B^x/_u$, und sei $t \in T_M$. Dann ist jede Formel der Form $B^t/_u$ eine *Instanz* von A. ($B^t/_u$ ist wiederum das Resultat der simultanen Ersetzung aller Vorkommen von u in B durch t.)

4. Informelle Semantik der Prädikatenlogik

Mit der Prädikatenlogik lassen sich natürlichsprachliche Sätze um einiges feinkörniger formalisieren als mit der Aussagenlogik.

So werden wir später zeigen können, dass folgendes intuitiv gültige Argument in der Prädikatenlogik auch formal gültig ist, während es in der Aussagenlogik formal ungültig ist.

Jeder Mann liebt eine Frau.
Hans ist ein Mann.
∴ Hans liebt eine Frau.

Die Formalisierung in $H_{P=}$ wäre folgende:

Pu : u ist ein Mann

Qu : u ist eine Frau

Ruv : u liebt v

a : Hans

$(x)[Px \supset (\exists x)[Qy \wedge Rxy]]$

Pa

$\therefore (\exists x)[Qy \wedge Ray]$

Noch ein Beispiel für Formalisierung:

Hans ist grösser als alle andern in seiner Klasse.

D (das zugrundeliegende Universum) = die Menge der Schüler in Hansens Klasse; dies ist die Bezugsmenge (Restriktion) für den Allquantor!

Suv : u ist grösser als v

$(x)[\sim x = a \supset Sax]$

5. Übungsaufgaben:

(werden noch bekanntgegeben)