7. Sitzung

Korrektheit und Vollständigkeit von H_s

Nachdem wir nun H_s unter beweistheoretischem und semantischem Aspekt untersucht haben, wollen wir nun zeigen, dass diese beiden Seiten von H_s nicht vollkommen unabhängig voneinander sind, sondern dass sie in einer gewissen Beziehung zueinander stehen, nämlich dass z.B. Beweisbarkeit und Gültigkeit von Formeln *extensional* äquivalent sind (d.h. die gleichen Formeln sind beweisbar und gültig).

Doch gehen wir die Sache Schritt für Schritt an.

Ein System ist *korrekt* bzgl. des Beweisbarkeitsbegriffs wenn folgendes gilt:

Wenn $\vdash A$, dann $\models A$.

D.h. jede beweisbare Formel ist auch gültig (unter der gegebenen Semantik für die Sprache von H_s .) Die beweisbaren Formeln sind eine Untermenge der gültigen Formeln.

Wenn also die Intention des Systemdesigners von H_s die war, den Gültigkeitsbegriff durch den Beweisbarkeitsbegriff "einzufangen", dann heisst das, dass das System korrekt ist, wenn zumindest nicht zuviel beweisbar ist. (Das wäre ja der Fall, wenn eine Formel von H_s beweisbar wäre, die nicht die gewünschte semantische Eigenschaft der Gültigkeit hätte.)

Natürlich wäre der Systemdesigner nur dann zufrieden, wenn es keine gültigen Formeln gäbe, die nicht beweisbar wären, d.h. wenn auch alle gültigen Formeln beweisbar wären. D.h.

Wenn $\models A$, dann $\vdash A$.

Ein System, das diese Eigenschaft besitzt, nennen wir *vollständig* bzgl. des Beweisbarkeitsbegriffs.

Korrektheit und Vollständigkeit sind also Eigenschaften von Deduktionssystemen bzgl. eines beweistheoretischen Begriffs (Beweisbarkeitk, Ableitbarkeit, Konsistenz).

Mit einem Schlagwort kann man diese Eigenschaften auch folgendermassen charakterisieren: Korrektheit heisst "nicht zuviel" (beweisbar, etc.) und Vollständigkeit heisst "nicht zuwenig", oder "genug" (beweisbar, etc.).

Ein System ist also korrekt und vollständig ("adäquat") bzgl. des Beweisbarkeitsbegriffs, wenn genau die gültigen Formeln beweisbar sind.

Die Korrektheit eines Systems bzgl. des Ableitbarkeits- und des Konsistenzbegriffs bestehen in folgendem.

Wenn $\Gamma \vdash A$, dann $\Gamma \models A$,.

(Jede Formel, die aus einer Menge ableitbar ist, folgt auch logisch aus ihr.)

Wenn Γ simultan erfüllbar ist, dann ist Γ konsistent.

Und die Vollständigkeit eines Systems bzgl. des Ableitbarkeits- und des Konsistenzbegriffs bestehen in folgendem.

Wenn $\Gamma \models A$, dann $\Gamma \vdash A$,.

(Jede Formel, die aus einer Menge logisch folgt, muss auch aus ihr abgeleitet werden können.)

Wenn Γ konsistent ist, dann ist Γ simultan erfüllbar.

1. Korrektheit von H_s

Wir werden zunächst die Korrektheit von H_s beweisen bzgl. aller drei beweistheoretischen Begriffe.

Hier nochmals die relevanten Metatheoreme, in der Reihenfolgen ihrer Beweise. Die Numerierung bezieht sich auf Thomason 1970, Kapitel VII. (Γ sei hier eine Formelmenge einer Morphologie M, und A eine Formel der Morphologie M.)

M6. Wenn $\vdash A$, dann $\models A$.

M7. Wenn $\Gamma \vdash A$, dann $\Gamma \models A$.

M8. Wenn Γ simultan erfüllbar ist, dann ist Γ konsistent.

Beweis von M6:

1. Sei $\vdash A$.
2. Dann gibt es einen Beweis von $A, A_1, ..., A_n = A$.
3. Für jedes A_i gilt: i) A_i ist ein Axiom, oder
   ii) A_i mit mp aus 2 früheren Zeilen.
4. Alle Axiome sind gültig, d.h. wenn B ein Axiom ist, dann gilt $\models B$.
5. Die Regel mp ist "gültigkeitserhaltend", d.h. wenn $\models A$ und $\models A \supset B$, dann $\models B$.
6. Also muss die letzte Zeile eines Beweises (und jede vorhergehende ebenfalls) gültig sein.
7. Also $\models A$.

(restliche Beweise in der Vorlesung.)

Resultate der Korrektheit von H_s:

Wenn $\not\models A$, dann $\not\vdash A$.

D.h. wenn man mit den Wahrheitstafeln zeigen kann, dass eine Formel nicht gültig ist, dann weiss man, dass sie auch nicht beweisbar ist.

Und analog:

Wenn $\Gamma \not\models A$, dann $\Gamma \not\vdash A$.

Weiterhin, wenn man weiss, dass eine Menge simultan erfüllbar ist, dann weiss man auch, dass sich aus ihr keine Kontradiktion ableiten lässt.

2. Vollständigkeit von H_s.

Vollständigkeitsbeweise sind, verglichen mit Korrektheitsbeweisen, meist um einiges schwieriger.

Hier nochmals die relevanten Metatheoreme, in der (logischen) Reihenfolge ihrer Beweise. (Γ sei hier eine Formelmenge einer Morphologie M, und A eine Formel der Morphologie M.)

M15. Wenn Γ konsistent ist, dann ist Γ simultan erfüllbar.

M18. Wenn $\Gamma \not\vdash A$, dann $\Gamma \vdash A$.

M20. Wenn $\not\vdash A$, dann $\vdash A$.

M18 und M20 sind hier relativ einfache Korollare von M15. Die eigentliche Schwierigkeit ist der Beweis von M15.

Beweis von M18:

(in der Vorlesung)

Beweis von M20:

(in der Vorlesung)

Beweis von M15

M15. Wenn Γ konsistent ist, dann ist Γ simultan erfüllbar.

Zum Beweis von M15 brauchen wir eine Definition und zwei Lemmata.

(1) Definition der M-gesättigten Menge (solche Mengen heissen auch "maximal konsistente Mengen" (im semantischen Sinne von konsistent).

(2) Lemma 1: Jede konsistente Menge lässt sich zu einer M-gesättigten Menge erweitern. (M11)

(3) Lemma 2: Jede M-gesättigte Menge ist simultan erfüllbar. (M13)

Damit geht die Struktur des Beweises von M15 wie folgt.

1. Sei Γ konsistent.
2. Dann kann Γ zu einer M-gesättigten Menge Γ^* erweitert werden ($\Gamma \subseteq \Gamma^*$). (Lemma 1)
3. Γ^*, als M-gesättigte Menge, ist simultan erfüllbar. (Lemma 2)
4. Γ ist simultan erfüllbar (wegen $\Gamma \subseteq \Gamma^*$).

Nun zur Definition von M-gesättigter Menge:

D1. Eine Menge Γ von Formeln von M ist **M-gesättigt** (engl. *M-saturated*) gdw

1. Für alle Formeln A von M, $A \in \Gamma$ oder $\sim A \in \Gamma$;

2. Γ ist konsistent.

(Die Bedingung 1 nennt man auch "Negationsvollständigkeit".)

Es sind also *genug* Formeln von M in Γ (Bed. 1), aber *nicht zu viel*e (Bed. 2), so dass Γ inkonsistent würde.

Man nennt solche Mengen auch *maximal konsistent*, weil sie ein Maximum an Formeln enthalten ohne inkonsistent zu sein. Fügt man eine Formel zu einer M-gesättigten MengeΓ hinzu, die noch nicht in Γ ist, dann wird Γ inkonsistent.

Dies und einige andere Fakten können wir in den folgenden Metatheoremen niederlegen.

M1. Wenn Γ M-gesättigt ist, dann gilt:

Wenn $\Gamma \vdash A$, dann $A \in \Gamma$.

Zusammen mit M4 aus Kapitel V gilt dann für M-gesättigte Mengen Γ:

M2. $\Gamma \vdash A$ gdw $A \in \Gamma$.

M3. $A \in \Gamma$ gdw $\sim A \notin \Gamma$.

M4. $A \supset B \in \Gamma$ gdw $A \notin \Gamma$ oder $B \in \Gamma$.

M5. Wenn $\Gamma \subseteq \Delta$ und Δ ist konsistent, dann $\Gamma = \Delta$.

(Beweise teilweise in der Vorlesung)

Als nächstes beweisen wir

M11. Jede konsistente Menge von Formeln von M kann zu einer M-gesättigten Menge erweitert werden. (Lemma 1)

Beweis von M11.

Sei Γ eine konsistente Menge von Formeln von M, und sei $A_0, A_1, A_2, \ldots$ die alphabetische Anordnung der Formeln von M.

Wir definieren nun induktiv eine Folge von Mengen $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$ wie folgt:

$\Gamma_0 = \Gamma$

und die Glieder der Folge werden auf folgende Weise konstruiert:

Sei $\Gamma_{i+1} = \Gamma_i \cup \{A_i\}$, wenn $\Gamma_i \cup \{A_i\}$ konsistent ist, und $\Gamma_{i+1} = \Gamma_i \cup \{\sim A_i\}$ sonst.

Beispiel:

Sei M = {P, Q, R}

Alphabetische Anordnung der Formeln von M:

A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	...
P	Q	R	~P	~Q	~R	(P ⊃ P)	...

Sei $\Gamma_0 = \Gamma = \{P \supset Q, \sim Q\}$

Dann ist $\Gamma_1 = \{P \supset Q, \sim Q, \sim P\}$,

$\Gamma_2 = \{P \supset Q, \sim Q, \sim P\}$,

$\Gamma_3 = \{P \supset Q, \sim Q, \sim P, R\}$

Satz:

Wenn Γ_i konsistent ist, dann auch Γ_{i+1}. (wg. V. M35)

Sei Γ^* nun die Vereinigung all der Γ_i .

$\Gamma^* = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \ldots$

Wir müssen zeigen:

a) Γ^* ist konsistent

b) Γ^* ist negationsvollständig

Dann haben wir gezeigt, dass Γ^* M-gesättigt ist.

Zu a) :

Wir wissen, alle Γ_i sind konsistent, per Konstruktion.

1. Sei Γ^* inkonsistent. Annahme
2. Dann gibt es eine endliche Untermenge, $\{B_1, B_2, \ldots, B_k\}$ von Γ^*, die inkonsistent ist. (wg. Kompaktheit)
3. Es gibt ein Glied der Folge der Γ_i , Γ_{k^*} , das alle B_i enthält: $\{B_1, B_2, \ldots, B_k\} \subseteq \Gamma_{k^*}$
4. Γ_{k^*} ist inkonsistent. (wegen Monotonie)
5. Aber Γ_{k^*} muss, per Konstruktion, konsistent sein.

Widerspruch!!

Zu b) :

Z.z.: für alle Formeln A, entweder $A \in \Gamma^*$ oder $\sim A \in \Gamma^*$.

Dies ist klar wegen der Konstruktion der Γ_i:

entweder $A_i \in \Gamma_{i+1}$ oder $\sim A_i \in \Gamma_{i+1}$

und jede Formel A_i kommt irgendwann in der alphabetischen Aufzählung vor; d.h. es gibt ein i, so dass $A = A_i$.

Wir müssen jetzt noch M13 beweisen.

M13. Sei Γ eine M-gesättigte Menge von Formeln von M. Dann gibt es eine Belegung V von M, so dass gilt: $\Gamma = \{A : A$ ist eine Formel von M und $V(A) = W\}$.

Beweis:

Sei Γ eine M-gesättigte Menge von Formeln von M, und sei P ein Satzparameter von M.

Dann sei V die folgende Belegung von M:

Wenn $P \in \Gamma$, dann setzen wir $V(P) = W$, sonst setzen wir $V(P) = F$.

Wir zeigen, durch Induktion über die Komplexität von Formeln A, dass $V(A) = W$ gdw $A \in \Gamma$.

(Beweis in der Vorlesung)

3. Übungsaufgaben:

(1) Beweise (für Γ M-gesättigte Menge):

M2. $\Gamma \vdash A$ gdw $A \in \Gamma$.

M3. $A \in \Gamma$ gdw $\sim A \notin \Gamma$.

(2) Zeige (für Γ M-gesättigte Menge):

(a) Wenn $A \notin \Gamma$, dann $A \supset B \in \Gamma$.

(b) Wenn $B \in \Gamma$, dann $A \supset B \in \Gamma$.