# 6. Sitzung

## 1. Semantik für $H_s$

$H_s$ ist zunächst als ein *uninterpretiertes* formales System eingeführt worden. D.h. die Formeln von $H_s$ haben zunächst mal keine Bedeutung und sind blosse syntaktische Objekte. Sie sollen jedoch dazu benützt werden können, "Inhalte" oder "Bedeutungen" zu transportieren. Dies wird dadurch ermöglicht, dass man die Sprache von $H_s$ *interpretiert*, also den Zeichen "Bedeutungen" oder - neutraler - "semantische Werte" zuweist. Die Teiltheorie der Sprachtheorie, die dafür zuständig ist und die auch Eigenschaften von Formeln und Formelmengen sowie Beziehungen zwischen Formeln und Formelmengen untersucht, die auf den semantischen Werten oder Bedeutungen basieren, heisst *Semantik*. Kapitel VI von Thomason 1970 hat also die Semantik von $H_s$ zum Inhalt.

## 2. Definitionen wichtiger semantischer Begriffe

Zunächst mal einige wichtige semantische Definitionen:

D1. Eine *Morphologie* M für $H_s$ ist eine nicht-leere Menge von Objekten, genannt Satzparameter. Die Begriffe "Formel von M", "Theorem von M" und "Ableitbarkeit in M" seien definiert wie in Kapitel V, mit der einzigen Änderung, dass nur Satzparameter aus M betrachtet werden.

Eine Morphologie definiert also eine Sprache (die Menge aller Formeln, die in der Sprache ausgedrückt werden können).

D2. Eine *Belegung* einer Morphologie M für $H_s$ ist eine Funktion V, die jedem Satzparameter in M genau einen der Wahrheitswerte W und F zuweist. Seien $P \in$ M und V eine Belegung von M. Dann ist V($P$) der Wert, der $P$ durch V zugewiesen wird. D.h. V($P$) = W oder V($P$) = F.

Diese Semantik für $H_s$ ist also extrem einfach: es gibt nur zwei verschiedene "Bedeutungen" oder semantische Werte, nämlich die zwei Wahrheitswerte Wahrheit, W, und Falschheit, F.

Beispiel:

Sei M = {$P$, $Q$, $R$}. Dann können wir z.B. folgende Interpretation oder Belegung V für diese Morphologie festlegen:

V($P$) = W

V($Q$) = F

V($R$) = F

Eine solche Belegung entspricht also einer "Reihe" in den altbekannten Wahrheitstafeln, und sie sagt uns nur, dass $P$ etwas ausdrückt, was in der "Welt" V der Fall ist, und dass $Q$ und $R$ etwas ausdrücken, was in der "Welt" V nicht der Fall ist (sie sagen uns aber nicht, was genau in der Welt V der Fall ist).

D3. Sei V eine Belegung einer Morphologie M für $H_s$. Der Wahrheitswert V($A$) einer komplexen Formel $A$ von M unter der Belegung V ist definiert gemäss den folgenden (*semantischen*) *Regeln*:

1.Wenn $A = B \supset C$ , dann gilt: V($A$) = W, wenn
V($B$) = F oder V($C$) = W, und
V($A$) = F in allen andern Fällen.

2. Wenn $A = {\sim}B$ , dann gilt: V($A$) = W, wenn
V($B$) = F, und
V($A$) = F in allen andern Fällen.

Definition D3 legt also die "Bedeutung" unserer zwei Konnektive, $\supset$ und $\sim$ , fest. Dies entspricht genau den herkömmlichen Wahrheitstafeln für den Konditional und die Negation.

D4. Eine Formel $A$ von M ist *erfüllbar*, wenn es eine Belegung V von M gibt, so dass V($A$) = W.

Eine erfüllbare Formel ist also mindestens in einer möglichen Welt wahr.

D5. Eine Formel $A$ von M ist *gültig*, wenn für jede Belegung V von M gilt: V($A$) = W.

(Wir verwenden die Abkürzung "$\vdash A$" für "$A$ ist gültig". In anderen Logikbüchern findet sich auch das Kürzel '$\models$'.)

Eine (logisch) gültige Formel ist also in allen möglichen Welten wahr, kann also nicht falsch sein. (Gültige Formeln heissen auch oft *Tautologien*.)

D6. Sei $\Gamma$ eine Menge von Formeln von M, und V eine Belegung von M. Die Belegung V *erfüllt* $\Gamma$ *simultan*, wenn V jede Formel in $\Gamma$ erfüllt.

D7. Sei $\Gamma$ eine Menge von Formeln von M. $\Gamma$ ist *simultan erfüllbar*, wenn es eine Belegung V von M gibt, die $\Gamma$ simultan erfüllt.

Eine simultan erfüllbare Formelmenge ist also eine möglicherweise wahre "Geschichte" oder "Theorie".

D8. Sei $\Gamma$ eine Menge von Formeln von M und $A$ eine Formel von M. $\Gamma$ *impliziert* (*logisch*, *semantisch*) $A$ ( abgekürzt: $\Gamma \vdash A$ ), wenn jede Belegung von M, die $\Gamma$ simultan erfüllt, auch $A$ erfüllt.

## 2. Wichtige semantische Metatheoreme

Im folgenden werden einige wichtige semantische Metatheoreme aufgeführt. Bei einigen fällt auf, dass sie exakte beweistheoretische Entsprechungen haben.

M1. Sei M eine Morphologie für $H_S$ und V eine Belegung von M. Jede Formel $A$ von M erhält durch V einen eindeutig bestimmten Wert W oder F.

M2. Seien M und M' Morphologien für $H_S$ und sei M' $\subseteq$ M (d.h. M' ist Untermorphologie von M). Sei V eine Belegung von M und sei V' die Einschränkung von V auf M'; d.h. sei V'($P$) = V($P$) für alle $P \in$ M', und sei V' undefiniert für P $\notin$ M'. Dann gilt für alle Formeln $A$ von M': V($A$) = V'($A$).

Die Bedeutung von M2 ist, dass die Bewertung von Formeln einer Morphologie M nur von den in der Formel vorkommenden Satzparametern (Untermorphologie) abhängt. Dies berechtigt z.B. zur Verwendung von endlichen Wahrheitstafeln. Selbst von M unendlich ist: eine bestimmte Formel von M ist endlich lang und hat daher nur endlich viele Satzparameter, und nur von denen hängt der Wert der Formel ab.

M3. Seien M und M' Morphologien für $H_S$ und sei $A$ eine Formeln von M sowie M'. Dann gibt es eine Belegung von M, die $A$ erfüllt gdw es gibt eine Belegung von M', die $A$ erfüllt.

Die Bedeutung von M3 ist, dass der Erfüllbarkeitsbegriff nicht von einer bestimmten Morphologie abhängt. Wir können die zwei Morphologien M und M' als die Idiolekte verstehen, die von zwei Personen gesprochen werden. $A$ ist dann eine Formel, die den beiden Idiolekten gemeinsam ist. Und wenn die Formel dann "für mich" erfüllbar ist, dann ist sie auch "für dich" erfüllbar.

Entsprechendes gilt natürlich auch für die Gültigkeit von Formeln, simultane Erfüllbarkeit von Formelmengen, und für die logische Folgerung.

M5. $\models A$ gdw $\sim A$ ist nicht erfüllbar.
("$\models A$" steht für "$A$ ist gültig")

M6. A ist erfüllbar gdw $\models \sim A$

M7. Seien $A$ und $B$ Formeln von M, und sei $A'$ das Resultat der Substitution von $B$ für $P$ in $A$, wobei $P$ ein Satzparameter von M sei. Dann gilt: Wenn $\models A$, so auch $\models A'$. (Substitution)

M8. Sei $\{A_1, ..., A_n\}$ eine endliche Menge von Formel einer Morphologie M, und sei V eine Belegung von M. Dann erfüllt V $\{A_1, ..., A_n\}$ simultan gdw V erfüllt $A_1 \wedge ... \wedge A_n$.

M9. Sei $\Gamma$ eine Menge von Formeln einer Morphologie M, und sei V eine Belegung von M. Dann erfüllt V $\Gamma$ simultan gdw für alle endlichen Untermengen $\{A_1, ..., A_n\}$ von $\Gamma$ gilt: V erfüllt $A_1 \wedge ... \wedge A_n$.

M10. Sei $\Gamma$ eine Menge von Formeln einer Morphologie M, und sei V eine Belegung von M. Dann gilt: Wenn V $\Gamma$ simultan erfüllt, dann erfüllt V simultan jede Untermenge von $\Gamma$.

M13. Wenn eine Menge $\Gamma$ von Formeln simultan erfüllbar ist, dann ist jede Untermenge von $\Gamma$ simultan erfüllbar.

M14. $\{A\}$ ist simultan erfüllbar gdw $A$ ist erfüllbar.

M15. Wenn $\Gamma$ simultan erfüllbar ist und A ist gültig ( $\models A$ ), dann ist auch $\Gamma \cup \{A\}$ simultan erfüllbar.

M17. $\Gamma \models A$ gdw $\Gamma \cup \{\sim A\}$ ist nicht simultan erfüllbar.

(Dies ist z.B. das genaue semantische Äquivalent des beweistheoretischen Metatheorems M34 aus Kapitel V:

M34. $\Gamma \vdash A$ gdw $\Gamma \cup \{\sim A\}$ ist inkonsistent.)

M18. $\varnothing \models A$ gdw $\models A$

($A$ folgt aus der leeren Menge gdw $A$ gültig ist.)

M19. Wenn $A \in \Gamma$, dann $\Gamma \models A$.

M20. Wenn $\Gamma \models A$, dann $\Gamma \cup \Delta \models A$.

M21. Wenn $\Gamma \models A$ und $\Delta \cup \{A\} \models B$, dann $\Gamma \cup \Delta \models B$.

M22. Wenn $\Gamma \models A \supset B$, dann $\Gamma \cup \{A\} \models B$.

M23. Wenn $\Gamma \cup \{A\} \models B$, dann $\Gamma \models A \supset B$.

M24. Seien $A$ und $B$ Formeln von M, und sei V eine Belegung von M. Dann gilt:
V($A \vee B$) = W gdw V($A$) = W oder V($B$) = W (oder beides).

## 4. Die vollständige Wahrheitstafelmethode

Für die oben definierten Begriffe bietet die sogenannte vollständige Wahrheitstafelmethode ein Entscheidungsverfahren, jedenfalls wenn nur endliche Formelmengen betrachtet werden.

So kann man immer bestimmen, ob eine Formel A gültig ist oder nicht. Man konstruiert eine vollständige Wahrheitstafel - mit allen Belegungen - für diese Formel. Diese ist endlich gross, da es nur endlich viele Belegungen für endlich viele Satzparameter gibt. Dann schaut man, ob die Spalte unter dem Hauptkonnektiv nur den Wert W enthält. Wenn ja, ist die Formel gültig; wenn mindestens einmal der Wert F auftritt, ist die Formel nicht gültig. Entsprechendes macht man für die anderen logischen Konzepte.

## 5. Die Kurze Wahrheitstafelmethode

In der Praxis benützt man allerdings nicht die vollständige Wahrheitstafelmethode, die wegen der exponentiellen Zunahme der Anzahl der Belegungen schnell unhandlich wird, sondern die sogenannte Kurze Wahrheitstafelmethode.

Beispiel:

Man will prüfen, ob

die Formel

$$P \supset ( Q \supset P )$$

gültig ist.

Dann schaut man nach, ob die kurze Wahrheitstafel

| P Q | P ⊃ ( Q ⊃ P ) |
|---|---|
| ? ? | F |

auf der linken Seite (Belegung!) so ausgefüllt werden kann, dass sich der Wahrheitswert F unter dem Hauptkonnektiv der Formel ergibt. Ist dies möglich, dann gibt es offensichtlich eine Belegung, die der Formel den Wert F zuweist. Also ist die Formel nicht gültig. Ist dies nicht möglich, obwohl man alle Möglichkeiten ausgeschöpft hat, dann gibt es offensichtlich keine solche Belegung und die Formel hat immer den Wert W, ist also gültig.

Entsprechendes macht man für die anderen logischen Konzepte (Erfüllbarkeit, simultane Erfüllbarkeit, logische Folgerung, etc.)

## 6. Konsistenzbäume - Semantische Tableaux

Eine etwas stärker algorithmisierte Form der Kurzen Wahrheitstafelmethode steht mit den Konsistenzbäumen und Semantischen Tableaux zur Verfügung.

Der Methode zugrunde liegt die Tatsache, dass alle wichtigen semantischen Begriffe mit Hilfe des (semantischen) Konsistenzbegriffs, sprich: der simultanen Erfüllbarkeit von Formelmengen, definiert werden können:

$A$ ist erfüllbar gdw $\{A\}$ ist simultan erfüllbar.

$A$ ist gültig gdw $\{\sim A\}$ ist nicht sim.erfüllbar.

$A$ ist äquivalent mit $B$ gdw $\{A, \sim B\}$ ist nicht sim. erfüllbar.

$\Gamma \mid\!\vdash A$ gdw $\Gamma \cup \{\sim A\}$ ist nicht sim. erfüllbar. (M34)

## Konsistenzbäume:

Begriffe:

Ein **Baum** besteht aus einer Menge von **Knoten**, die durch **Kanten** verbunden sind. Der oberste Knoten ist die **Wurzel** des Baumes, die untersten heissen **Blätter**. Ein **Pfad** ist eine maximale Menge von verbundenen Kanten von der Wurzel zu einem Blatt.

Bei Konsistenzbäumen stehen an den Knoten Formelmengen.

Ein Pfad (durch den Baum) ist *geschlossen* gdw es gibt Formeln $A$ und $\sim A$, die entlang des Pfades liegen.

Sonst heisst ein Pfad *offen*.

Ein Baum heisst *geschlossen* gdw alle Pfade des Baumes sind geschlossen.

Sonst heisst ein Baum *offen*.

Man kann zeigen, dass ein offener Baum einer simultan erfüllbaren (semantisch konsistenten) Formelmenge entspricht.

Aus einem offenen Pfad lässt sich eine Belegung ablesen, die die Formelmenge simultan erfüllt.

Entsprechend entspricht ein geschlossener Baum einer simultan nicht erfüllbaren (semantisch inkonsistenten) Formelmenge.

Die Methode:

Gegeben sei eine Formelmenge $\{A_1, ..., A_n\}$.

1) Schreibe die einzelnen Formeln untereinander an die Wurzel des Baumes.

2) Arbeite die einzelnen Formeln nach den Regeln ihrer Haupkonnektive ab. (Wenn eine Formel abgearbeitet ist, versehe sie mit einer Marke: ✓)

   (Es gibt 3 Regeln: i) für Konditionale, $A \supset B$

   ii) für negierte Konditionale, $\sim(A \supset B)$

   iii) für doppelte Negationen, $\sim\sim A$.

   Die Regel für Konditionale ist eine "verzweigende" Regel, also eine Regel, die verschiedene Pfade generiert.

   Man muss eine noch nicht abgearbeitete Formel an allen noch offenen Pfaden abarbeiten.

   Man soll einen Pfad schliessen sobald ein kontradiktorisches Formelpaar, $A$ und $\sim A$, entlang dieses Pfades liegt.)

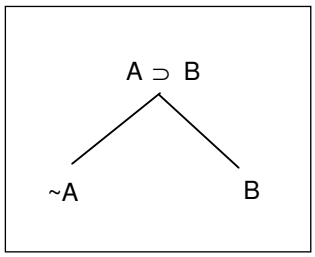
3) Wenn ein Baum *vollständig* ist (d.h. alle Formeln der drei oben genannten Formen sind markiert), dann schau nach, ob alle Pfade geschlossen sind, oder ob es mindestens einen offenen Pfad gibt.

   Im ersten Fall: die Formelmenge ist simultan nicht erfüllbar, d.h. semantisch inkonsistent.

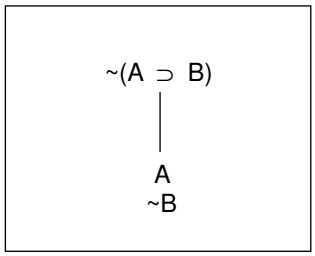
   Im zweiten Fall: die Formelmenge ist simultan erfüllbar (semantisch konsistent). Ein offener Pfad liefert uns eine erüllende Belegung.

Die drei Regeln:

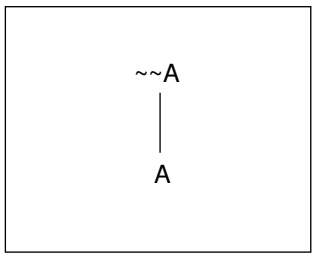
Die Regel für Konditionale:




Die Regel für negierte Konditionale:




Die Regel für doppelte Negationen:




Beispiel:

(in der Vorlesung)

## 7. Übungsaufgaben:

1) Konstruiere die Regeln für die übrigen, definierten, Konnektive (für Konsistenzbäume).

2) Beweise M18 - M24.

3) Entscheide durch Beweise oder durch Gegenbeispiele die folgenden Fragen:

   a) Wenn sowohl $\Gamma$ als auch $\Delta$ simultan erfüllbar sind, ist dann $\Gamma \cup \Delta$ auch simultan erfüllbar?

   b) Wenn sowohl $\Gamma$ als auch $\Delta$ simultan erfüllbar sind, ist dann $\Gamma \cap \Delta$ auch simultan erfüllbar?

   c) Wenn $\Gamma$ simultan erfüllbar ist, ist dann auch $\{\sim A : A \in \Gamma\}$ simultan erfüllbar?

4) Finde eine Formelmenge, $\Gamma$, die nicht simultan erfüllbar ist, wo jedoch für je zwei Elemente, $A$ und $B$, gilt: $\{A, B\}$ ist simultan erfüllbar.