5. Sitzung

1. Ersetzung und Substitution

Ersetzung (engl. *replacement*) und **Substitution** sind zwei wichtige Operationen auf Formeln oder Zeichenreihen.

Wir definieren diese Begriffe zunächst und stellen dann einige Metatheoreme darüber auf.

Diese Begriffe sind auch wichtig im Zusammenhang mit dem Begriff der **Schlussregel**.

2. Ersetzung

Informell gesprochen ist die Idee die, dass man in einer Formel C eine Teilformel (engl. *subformula*, Def. 8) A durch eine äquivalente Formel B an 0 oder mehr Stellen (Vorkommen) von A in C ersetzen kann ("salva veritate", semantisch gesprochen).

Sei C die Formel $\sim\sim P \supset (\sim R \supset \sim\sim\sim P)$, sei A die Formel $\sim\sim P$ und sei B die Formel P.

Dann sind

$C_1 = \sim\sim P \supset (\sim R \supset \sim\sim\sim P)$
(0 Vorkommen von $\sim\sim P$ in C durch P ersetzt)

$C_2 = P \supset (\sim R \supset \sim\sim\sim P)$
(1. Vorkommen von $\sim\sim P$ in C durch P ersetzt)

$C_3 = \sim\sim P \supset (\sim R \supset \sim P)$
(2. Vorkommen von $\sim\sim P$ in C durch P ersetzt)

$C_4 = \sim\sim P \supset (\sim R \supset \sim P)$
(alle Vorkommen von $\sim\sim P$ in C durch P ersetzt)

D.h. C_1 - C_4 sind alles mögliche Resultate der Ersetzung von $\sim\sim P$ in C durch P .

Vor der Definition der Ersetzung sollten wir noch den Begriff der *Teilformel* genau bestimmen:

Def. 8. (Teilformel)

1. A ist eine Teilformel von A.
2. Wenn $B \supset C$ eine Teilformel von A ist, dann sind sowohl B als auch C Teilformeln von A..
3. Wenn $\sim B$ eine Teilformel von A ist, dann ist auch B eine Teilformel von A..

Die genaue Definition der *Ersetzung* ist folgende:

Def. 9. (Ersetzung)

1. Wenn A dieselbe Formel wie C ist ($A = C$), dann sind C und B beides Resultate der Ersetzung von A durch B in C.
2. Wenn A nicht dieselbe Formel wie $C \supset D$ ist ($A \neq C \supset D$), dann ist $C' \supset D'$ ein Resultat der Ersetzung von A durch B in $C \supset D$, falls C' ein Resultat der Ersetzung von A durch B in C ist, und falls D' ein Resultat der Ersetzung von A durch B in D ist.
3. Wenn A nicht dieselbe Formel wie $\sim C$ ist ($A \neq \sim C$), dann ist $\sim C'$ ein Resultat der Ersetzung von A durch B in $\sim C$, falls C' ein Resultat der Ersetzung von A durch B in C ist.
4. Wenn A nicht dieselbe Formel wie P ist ($A \neq P$), dann ist P ein Resultat der Ersetzung von A durch B in P.

Beispiel einer Ersetzung:

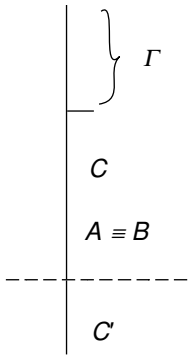
(in der Vorlesung)

Das Metatheorem, in dem Ersetzung eine wichtige Rolle spielt, ist M30:

M30. Wenn $\Gamma \vdash C$ und $\Gamma \vdash A \equiv B$, und C' ist ein Resultat der Ersetzung von A durch B in C, dann $\Gamma \vdash C'$.

D.h. in einer Formel C kann man eine Formel A durch eine mit ihr äquivalente Formel, B, "salva derivitate" ersetzen.

Schematisch:



Dieses Metatheorem rechtfertigt die sogenannten ERSETZUNGSREGELN (DeMorgan, Kommutativität, Assoziativität einiger Konnektive, ...). Davon jedoch später.

Der Beweis von M30 ist relativ einfach, wenn man folgendes Metatheorem hat:

M29. $A \equiv B \vdash C \equiv C'$, wobei C' ein Resultat der Ersetzung von A durch B in C ist.

Beweis von M30:

1. $\Gamma \vdash A \equiv B$	Annahme
2. Sei C' ein Resultat der Ersetzung von A durch B in C	Annahme
3. $A \equiv B \vdash C \equiv C'$	M29
4. $\Gamma \vdash C \equiv C'$	1, 2, M6

5. $\Gamma \vdash C$ Annahme
6. $\Gamma \vdash C'$ 4, 5, M26

Die Crux ist natürlich die Erstellung von M29.

(Beweis in der Vorlesung)

3. Substitution

Im System S_0 hatten wir neben Modus Ponens eine zweite Regel, selbst **Substitution** genannt:

$$\frac{B}{B^{A/P}}$$

wobei $B^{A/P}$ das Ergebnis der Substitution aller Vorkommen von P in B durch A ist.

NB: Anders als bei der Ersetzung, werden bei der Substitution nicht beliebige Teilformeln durch etwas anderes ersetzt, sondern nur *atomare* Teilformeln, also Satzparameter. Weiterhin werden bei der Substitution *alle* Vorkommen des entsprechenden Satzparameters durch eine Formel substituiert, nicht - wie bei der Ersetzung - 0, einige oder alle Vorkommen.

In H_S haben wir keine *primitive* Regel der Substitution. Wir werden jedoch ein Metatheorem beweisen, das dieser Substitutionsregel entspricht.

Doch zunächst einmal die Definition der Substitution als Operation auf Formeln bzw. Zeichenreihen.

Def. 10 (Substitution)

1. Wenn B ein Satzparameter ist, dann ist das Resultat der Substitution von A für P in B A, falls P derselbe Satzparameter ist wie B, und sonst B.
2. Wenn B die Formel $C \supset D$ ist, dann ist das Resultat der Substitution von A für P in B die Formel $C' \supset D'$, wobei C' das Resultat der Substitution von A für P in C ist, und D' das Resultat der Substitution von A für P in D ist.
3. Wenn B die Formel $\sim C$ ist, dann ist das Resultat der Substitution von A für P in B die Formel $\sim C'$, wobei C' das Resultat der Substitution von A für P in C ist.

Hier nun das einschlägige Metatheorem:

M31. Wenn $\vdash A$, und A' ist das Ergebnis der Substitution aller Vorkommen von P in A durch B ($A' = A^{B/P}$), dann $\vdash A'$.

D.h. wenn A beweisbar ist in H_S, dann auch alle Substitutionen von A.

NB: Dies bezieht sich lediglich auf den *Beweisbarkeitsbegriff* (nicht auf Ableitbarkeit allgemein).

D.h. wenn A beweisbar ist in H_S, dann auch alle Substitutionen von A.

Beweis von M31:

(in der Vorlesung)

4. Der Begriff der Schlussregel

Ein *Schluss* ist ein geordetes Paar $\langle \Gamma, A \rangle$.

Eine *Schlussregel* ist eine Menge $\mathcal{R}$ von Schlüssen.

Z.B. ist Modus Ponens als Schlussregel die Menge der geordneten Paare $\langle \{A \supset B, A\}, B \rangle$ mit A, B Formeln von H_S.

mp = { $\langle \{A \supset B, A\}, B \rangle$: A, B Formeln von H_S }

Z.B. gilt:

$\langle \{P_1 \supset \sim P_3, P_1\}, \sim P_3 \rangle \in$ mp

$\langle \{(P_2 \supset P_5) \supset P_5, P_2 \supset P_5\}, P_5, \rangle \in$ mp

Man unterscheidet

(1) **primitive** Regeln

(2) **abgeleitete** Regeln (engl. *derived rules*)

(3) **zulässige** Regeln (engl. *permissible rules*)

Beispiel: In H_S ist Modus Ponens die einzige primitive Regel.

5. Zulässige Regel

$\mathcal{R}$ (mit $\langle \Gamma, A \rangle \in \mathcal{R}$) ist eine **zulässige** Regel von H_S gdw wenn für alle $B \in \Gamma$ gilt: $\vdash B$, dann $\vdash A$.

Also ist SUBSTITUTION eine zulässige Regel, wobei

SUBSTITUTION = {$\langle \{A\}, A' \rangle$: A ist Formel von H_S und A' ist das Resultat der Substitution von B für P in A}

SUBSTITUTION kann natürlich keine abgeleitete Regel sein, da nicht allgemein gilt:

$\{B\} \vdash B'$

Z.B. wollen wir nicht haben:

$\{P\} \vdash \sim P$!!!

Warum nicht?

1) semantisch: aus P folgt nicht $\sim P$

2) syntaktisch: $\{P\} \vdash \sim P$
$\{P\} \vdash P$ M4

damit könnte man in H_S aus P alles ableiten!

Modus Ponens, unsere einzige primitive Regel, ist übrigens auch eine zulässige Regel, da gilt:

wenn $\vdash A \supset B$ und $\vdash A$, dann $\vdash B$

6. Abgeleitete Regel

$\mathcal{R}$ ist eine **abgeleitete** Regel von H_S gdw $\Gamma \vdash A$, für alle $\langle \Gamma, A \rangle \in \mathcal{R}$

Damit ist ERSETZUNG eine abgeleitete Regel:

ERSETZUNG = $\{\langle \{A \equiv B, C\}, C' \rangle : A, B, C$ sind Formeln von H_S, und C' ist ein Resultat der Ersetzung von A durch B in $C\}$

Um einige Instanzen zu nennen für die Ersetzungsregel:

DeMorgan

Doppelte Negation

Kommutativität von $\wedge$, $\vee$ und $\equiv$

Assoziativität von $\wedge$, $\vee$ und $\equiv$

Kontraposition

und viele andere.

Andere übliche abgeleitete Regeln wären z.B.

Hypothetischer Syllogismus = $\{\langle \{A \supset B, B \supset C\}, A \supset C \rangle :$ A, B, C sind Formeln von $H_S\}$

Modus Tollens = $\{\langle \{A \supset B, \sim B\}, \sim A \rangle :$ A, B sind Formeln von $H_S\}$

Modus Ponens, unsere einzige primitive Regel, ist natürlich auch eine abgeleitete Regel, da gilt:

$A \supset B, A \vdash B$

7. Konsistenz von Formelmengen

Der Begriff der Konsistenz einer Menge von Formeln ist, neben dem Beweisbarkeits- und Ableitbarkeitsbegriff, einer der wichtigsten beweistheoretischen Begriffe.

Informell gesehen sind *in*konsistente Formelmengen *in sich widerspruchsvoll*, d.h. aus ihnen ist - wenn sie den Widerspruch nicht schon explizit enthalten - zumindest ein solcher Widerspruch ableitbar.

Wenn ein Widerspruch ableitbar ist aus einer Menge Γ, dann ist alles (d.h. jede Formel A) aus dieser Menge ableitbar (nach dem Prinzip $B, \sim B \vdash A$, d.h. M13).

Daraus ergibt sich die Definition für konsistente Mengen:

Def. 11. Eine Menge Γ von Formeln von H_S ist *konsistent* (in H_S) gdw es gibt eine Formel A, die aus Γ nicht ableitbar ist (d.h. nicht-$\Gamma \vdash A$).

Eine Formelmenge ist *inkonsistent* gdw wenn sie nicht konsistent ist.

Auch zum Begriff der Konsistenz gibt es einige wichtige Metatheoreme:

M32. Γ ist inkonsistent gdw es gibt eine Formel A, mit $\Gamma \vdash A$ und $\Gamma \vdash \sim A$.

M33. Γ ist konsistent gdw jede endliche Untermenge von Γ ist konsistent.

M34. $\Gamma \vdash A$ gdw $\Gamma \cup \{\sim A\}$ ist inkonsistent.

M35. Wenn Γ konsistent ist, dann ist entweder $\Gamma \cup \{A\}$ oder $\Gamma \cup \{\sim A\}$ konsistent.

Beweis von M32:

(in der Vorlesung)

8. Übungsaufgaben

(1) Zum Regelbegriff:

(a) Zeige, dass die Regel

$\{\langle \{A\}, B \rangle : A$ ist ein Satzparameter von $H_S\}$

eine zulässige Regel ist.

(b) Die leere Menge $\varnothing$ ist auch eine Regel von H_S. Zeige, dass es eine abgeleitete Regel von H_S ist.

(c) Zeige: Jede abgeleitete Regel ist auch ein zulässige Regel.

(2) Beweise M33 - M35.

(3) Zeige

(a) Γ ist konsistent gdw nicht-$\Gamma \vdash P_1 \wedge \sim P_1$

(b) $\{A\}$ ist inkonsistent gdw $\vdash \sim A$