4. Sitzung

1. Besprechung der Übungsaufgaben (Beweise der Metatheoreme M4 - M7).

(in der Vorlesung)

2. Noch zum Deduktionstheorem

M8. Wenn $\Gamma \cup \{A\} \vdash B$, dann $\Gamma \vdash A \supset B$

Beweis:

Der Beweis von M8 besteht aus 2 Schritten:

1. Schritt:

Wir wandeln die Ableitung von B aus $\Gamma \cup \{A\}$:

$C_1, ..., C_i, ..., C_n$

um in einen Array

$A \supset C_1, ..., A \supset C_i, ..., A \supset C_n$.

Dieser resultierende Array ist in der Regel keine Ableitung in H_S.

2. Schritt:

Durch systematische Einfügung von Formeln vor die Formeln $A \supset C_i$ ($1 \le i \le n$) wird dieser Array wieder zu einer Ableitung in H_S gemacht, und zwar zu einer Ableitung von $A \supset B$ aus Γ. D.h. die Abhängigkeit von A wurde getilgt, und die abgeleitete Formel ist nun nicht mehr B sondern ein Konditional mit der früheren Hypothese A als Antezendens und der früheren abgeleiteten Formel B als Konsequent.

Welche Formeln vor die $A \supset C_i$ jeweils eingefügt werden, hängt davon ab, auf welche Weise die Formel C_i in die ursprüngliche Ableitung "hineinkam".

Insbesondere gibt es hier 4 Möglichkeiten für C_i:

Fall 1) C_i ist ein Axiom

Fall 2) C_i ist eine Hypothese (Annahme), d.h.

Fall 2a) $C_i \in \Gamma$

Fall 2b) $C_i = A$

Fall 3) C_i kam durch mp von 2 früheren Zeilen j, k < i, mit $C_k = C_j \supset C_i$.

Im Fall 1 fügen wir vor $A \supset C_i$ die zwei Formeln

C_i	(C_i ist ein Axiom)
$C_i \supset (A \supset C_i)$	(Axiom 1)

ein. (Dann "folgt" $A \supset C_i$ aus diesen 2 Zeilen durch mp.)

Im Fall 2a machen wir Entsprechendes:

C_i	($C_i \in \Gamma$)
$C_i \supset (A \supset C_i)$	(Axiom 1)

(Wieder "folgt" $A \supset C_i$ aus diesen 2 Zeilen durch mp.)

Im Fall 2b fügen wir vor $A \supset C_i = A \supset A$ die ersten 4 Zeilen des 5-zeiligen Beweises von M1 ein.

Und schliesslich, im Fall 3, fügen wir vor $A \supset C_i$ die 2 Zeilen

$(A \supset (C_j \supset C_i)) \supset ((A \supset C_j) \supset (A \supset C_i))$ (Axiom 2)

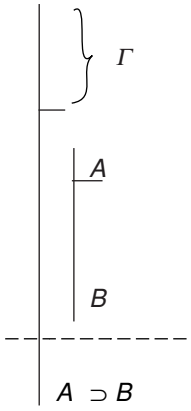
$(A \supset C_j) \supset (A \supset C_i)$ (aus $A \supset C_k$ und der vorigen Zeile durch mp)

Behauptung: Die resultierende Ableitung ist wieder eine Ableitung, und zwar von $A \supset B$ aus Γ.

Es ist klar: Die "Abhängigkeit" von A wurde eliminiert (Fall 2b) und nur noch Annahmen C_i aus Γ beibehalten. Jede der Zeilen $A \supset C_i$ ist wieder begründet!

Mit dem Deduktionstheorem haben wir gewissermassen die Bequemlichkeit der $\supset$intro Regel durch die metatheoretische Hintertür wieder eingeführt.

Das Deduktionstheorem im ND-Schema:



Mit M8 können wir z.B. M1: $\vdash A \supset A$ auch so beweisen (abgesehen davon, dass dies zirkulär wäre, da ja der Beweis von M1 zum Beweis von M8 benötigt wurde):

1. $A \vdash A$	M4
2. $\vdash A \supset A$	1, M8

Dies ist übrigens generell eines der Ziele der Metatheorie:

Wir gehen aus von einem sehr sparsam formulierten System, H_S : 3 Axiomenschemata, 1 Regel.

Dieses System ist sehr unhandlich für die praktische Arbeit. Jedoch bekommen wir durch die verschiedenen Metatheoreme die Flexibilität und praktische Handlichkeit eines Systems des Natürlichen Schliessens wieder zurück.

Ein Beispiel für die Anwendung von M8:

Aus $\{P\} \vdash Q \supset P$ folgt $\varnothing \vdash P \supset (Q \supset P)$.

(in Vorlesung)

Es gibt natürlich einen viel kürzeren Beweis von $\varnothing \vdash P \supset (Q \supset P)$. Welchen?

M9. $\vdash (A \supset B) \supset ((B \supset C) \supset (A \supset C))$.

Beweis: (in der letzten Vorlesung)

3. Weitere Metatheoreme

Die Beweise für die folgende Auswahl von Metatheoremen sollten sorgfältig durchgelesen werden. Sie stehen in Thomason 1970.

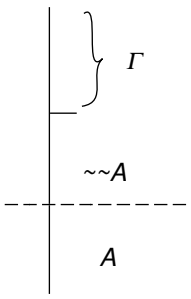
M12. Wenn $\Gamma \cup \{\sim A\} \vdash \sim B$, dann $\Gamma \cup \{B\} \vdash A$

(eine Art "Kontraposition")

M13. $A, \sim A \vdash B$ "ex falso quodlibet"

M19. Wenn $\Gamma \vdash \sim\sim A$, dann $\Gamma \vdash A$

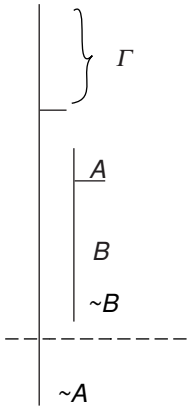
Schematisch:



"~elim"

M20. Wenn $\Gamma \cup \{A\} \vdash B$ und $\Gamma \cup \{A\} \vdash \sim B$, dann $\Gamma \vdash \sim A$

Schematisch:



"~intro"

4. Definitionen

Die Sprache von H_S kennt genau zwei Konnektive, $\sim$ und $\supset$.

Es macht die Sache allerdings natürlicher, wenn wir die anderen üblichen aussagenlogischen Konnektive für die natürlich-sprachlichen Partikel und, oder und gdw auch zur Verfügung haben.

Allerdings werden wir die Sprache von H_S nicht erweitern, sondern diese "Konnektive" als Abkürzungen einführen, durch Definition:

$'A \vee B' \quad =_{df} \quad '(A \supset B) \supset B'$

$'A \wedge B' \quad =_{df} \quad '\sim (A \supset \sim B)'$

$'A \equiv B' \quad =_{df} \quad '(A \supset B) \wedge (B \supset A)'$

Dies ist so zu verstehen, dass z.B. $\vee$ kein neues Konnektiv der Sprache ist, sondern dass z.B. $'P_0 \vee P_1'$ nur ein kürzerer Name für den Namen $'(P_0 \supset P_1) \supset P_1'$ ist.

5. Wichtige Metatheoreme für die neuen "Konnektive"

M21. Wenn $\Gamma \vdash A$, dann $\Gamma \vdash A \vee B$; und wenn $\Gamma \vdash B$, dann $\Gamma \vdash A \vee B$.

(entspricht der $\vee$intro-Regel)

M22. Wenn $\Gamma \vdash A \vee B$ und $\Gamma \cup \{A\} \vdash C$ und $\Gamma \cup \{B\} \vdash C$, dann $\Gamma \vdash C$.

(entspricht der $\vee$elim-Regel)

M23. Wenn $\Gamma \vdash A \wedge B$, dann $\Gamma \vdash A$ und $\Gamma \vdash B$.

(entspricht der $\wedge$elim-Regel)

M24. Wenn $\Gamma \vdash A$ und $\Gamma \vdash B$, dann $\Gamma \vdash A \wedge B$.

(entspricht der $\wedge$intro-Regel)

M25. Wenn $\Gamma \cup \{A\} \vdash B$ und $\Gamma \cup \{B\} \vdash A$, dann $\Gamma \vdash A \equiv B$.

(entspricht der $\equiv$intro-Regel)

M26. Wenn $\Gamma \vdash A \equiv B$ und $\Gamma \vdash A$, dann $\Gamma \vdash B$; und wenn $\Gamma \vdash A \equiv B$ und $\Gamma \vdash B$, dann $\Gamma \vdash A$.

(entspricht der $\equiv$elim-Regel)

6. Einige Hinweise zum Beweisen von Metatheoremen (ND-Ableitungen als Hilfestellung)

Wir können oft von einer ND-Ableitung "abgucken", wie ein entsprechendes Metatheorem bewiesen werden kann, da es für die Ableitungsschritte in der ND-Ableitung entsprechende Metatheoreme gibt, wie oben angedeutet wurde.

Beispiel:

Beweis von M21 und M22

(in der Vorlesung)

7. Übungsaufgaben

(1) Beweise M23 - M26.

(2) Verwende nur M4 und M8 (und natürlich M2) um folgende Metatheoreme zu beweisen:

(a) $\vdash A \supset (B \supset A)$

(b) $\vdash (A \supset (C \supset (B \supset C))$

(c) $\vdash A \supset (B \supset B)$