3. Sitzung

1. Logik vs. Metalogik

Logik und Metalogik verhalten sich zueinander etwa so wie

Logik	Metalogik
Musizieren	Musikologie studieren
eine Sprache sprechen	als Linguist eine Sprache studieren
Objektsprache sprechen	in Metasprache über die Objektsprache Untersuchungen anstellen

2. Sprechkonventionen

Normalerweise verwechseln wir eine Theorie (Sprache) über einen Gegenstand nicht mit den Gegenständen selbst.

In der Logik und Linguistik sind aber unsere Gegenstände (Sprachen, Formale Systeme) selbst sprachlicher Natur; deshalb muss man hier besonders vorsichtig sein, um Verwirrung zu vermeiden.

Sprache, Formale Systeme (über die wir sprechen wollen; die wir studieren wollen)	Sprache, in der wir unsere Forschungen durchführen, niederschreiben, diskutieren, lehren
Objektsprache	Metasprache

(Dies sind natürlich relative Begriffe! Wir können auch eine Metasprache zum Forschungsgegenstand machen; dann brauchen wir gewissermassen eine Metametasprache!)

Wir gebrauchen (engl. *use*) Namen, Zeichen, Symbole, um gewisse Dinge zu erwähnen (engl. *mention*).

Z.B. gebrauchen wir den Namen 'Hans', um die Person Hans zu erwähnen.

Berlin ist die Hauptstadt Deutschlands.

Hier wird 'Berlin' - ein Name mit 6 Buchstaben - gebraucht, um die Stadt Berlin zu erwähnen.

Berlin hat 6 Buchstaben <--- Unsinn!

'Berlin' hat 6 Buchstaben <---- korrekt

Hier wird ''Berlin'' gebraucht, um den Namen 'Berlin' zu erwähnen. ''Berlin'' ist der Name eines Namens, nämlich 'Berlin'.

''Berlin'' ist ein Name (von 'Berlin') und zwar ein Quotierungsname (*quotation name*).

Wir können aber auch andere Namen erfinden für Namen, z.B. soll 'Hans' ein Name sein für 'Berlin'.

Dann können wir sagen:

Hans hat 6 Buchstaben <---- richtig!
Hans hat 4 Buchstaben <---- falsch!
'Hans' hat 4 Buchstaben <---- richtig!

Oft werden in der (Meta-) Logik Quotierungsnamen verwendet, z.B. in den Aussagen

'(p ⊃ q)' ist ein Konditional
Die Formel '(p ⊃ q)' besteht aus 5 Zeichen.

Aus verschiedenen Gründen ist es jedoch besser, eine viel abstraktere Position zu beziehen (wie z.B. in unserem Buch).

Die Konvention, die wir annehmen werden, ist mehr wie obiges Beispiel:

Hans hat 6 Buchstaben

als wie in dem Beispiel:

'Berlin' hat 6 Buchstaben

Wir nehmen A, B, C als Metavariable für wohlgeformte Formeln (wffs) allgemein,

P, Q, R als Metavariable für atomare wffs (Satzparameter)

$P_0, P_1, \ldots$ als Metakonstante (Namen) für Satzparameter

$\Gamma, \Delta, \ldots$ als Metavariable für Mengen von wffs

Wir sagen dann z.B.

Wenn A und B wffs sind, dann auch $(A \supset B)$
$(A \supset B)$ ist ein Konditional
Sei $(A \supset B)$ falsch
$(P_0 \supset P_0)$ ist ein Konditional mit P_0 als Antezedens.

Wie die Formeln aussehen, wissen wir allerdings gar nicht!

'$(P_0 \supset P_0)$' ist ja der Name einer Formel und nicht die Formel selbst, und man kann gewissermassen nicht durch den Namen auf das bezeichnete Ding, die Formel, hindurchschauen (wie das z.B. bei Quotierungsnamen durchaus der Fall ist).

Man kann ja aus dem Namen einer Person auch nicht deren Eigenschaften ersehen, ob sie gross oder klein, dick oder dünn ist.

Es wäre also nicht unbedingt richtig zu sagen

$(P_0 \supset P_0)$ ist eine Formel mit 5 Zeichen

Es könnte ja sein, dass die Formel nur 3 Zeichen lang ist (wie z.B. in der Polnischen Notation - Cpp), oder 100 Zeichen hat.

Wir sind sozusagen immer in der Metasprache und von den Objekten (Formeln) total abgeschirmt.

Das ist kein Nachteil. Wir sind ja nur an *formalen* Eigenschaften von Formeln interessiert, nicht an *materiellen*.

Klammerkonventionen

(1) Äussere Klammern kann man weglassen

(2) Linksassoziativität [$A \supset B \supset B$ steht für $((A \supset B) \supset B)$]

(3) $\supset.$ steht für $\supset (\ldots)$, wobei die rechte Klammer so weit wie möglich rechts steht, ohne rechte Klammern zu überqueren, die mit einer linken Klammer links von $\supset$ gepaart ist.

Beispiel:

'$A \supset . B \supset B$' ist ein Name für eine Formel, die auch von den etwas längeren Namen, '$A \supset (B \supset B)$' und '$(A \supset (B \supset B))$' bezeichnet wird.

3. Das System H_S

(i) Die Sprache von H_S

Vokabular:

(a) $P_0, P_1, P_2, \ldots$ sind die Satzparameter von H_S

(b) $\supset$ (Hufeisen); ~ (Tilde) die Konnektive von H_S

(c)), (rechte und linke Klammer

Formationsregeln:

(1) Ein Satzparameter von H_S ist eine wff von H_S (atomare wff);

(2) Wenn A eine wff von H_S ist, dann auch $\sim A$;

(3) Wenn A, B wffs von H_S sind, dann auch $(A \supset B)$;

(4) Nichts sonst ist eine wff von H_S.

(Die andern üblichen Konnektive sind hier keine primitiven Konnektive, sondern werden durch Definition eingeführt.)

(ii) Der deduktive Apparat von H_S

Axiome: unendlich viele, aber eingeteilt in drei

Axiomenschemata:

AS1: $A \supset (B \supset A)$

AS2: $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$

AS3: $(\sim A \supset \sim B) \supset (B \supset A)$

Regeln:

Eine Regel, nämlich Modus Ponens (mp)

$$\frac{A \quad A \supset B}{B}$$

Einige wichtige beweistheoretische Begriffe:

Beweis:

Ein Array $A_1, \ldots, A_n$, wobei jedes A_i entweder

(a) ein Axiom ist, oder

(b) aus zwei vorhergehenden Zeilen durch mp gewonnen wurde (es gibt k, j < i, mit $A_k = A_j \supset A_i$.)

Beweis von A:

Ein Beweis $A_1, \ldots, A_n$ mit A als letztem Glied (d.h. $A_n = A$).

beweisbar:

A ist beweisbar (in H_S) gdw es gibt einen Beweis von A (A ist ein Theorem von H_S; Abk. $\vdash A$).

Ableitung (Deduktion) *von A* aus Γ

Ein Array $A_1, \ldots, A_n$, mit $A_n = A$, wobei für jedes A_i ($1 \le i \le n$) gilt:

entweder (a) $A_i \in \Gamma$

(b) A_i ist Axiom, oder

(c) A_i durch mp aus 2 vorhergehenden Zeilen.

ableitbar:

A ist aus Γ ableitbar (in H_S) gdw es gibt eine Ableitung von A aus Γ. (Abk. $\Gamma \vdash A$)

4. Einige Metatheoreme über H_S und ihre Beweise

M1. $\vdash A \supset A_i$

("In H_S ist jeder Konditional, dessen Antezedens mit dem Konsequent identisch ist, beweisbar.")

Beweis:

1. $(A \supset ((A \supset A) \supset A)) \supset ((A \supset (A \supset A)) \supset (A \supset A))$
2. $A \supset ((A \supset A) \supset A)$
3. $(A \supset (A \supset A)) \supset (A \supset A)$
4. $A \supset (A \supset A)$
5. $A \supset A$

(Annotation als Übung!)

M2. $\vdash A$ gdw $\varnothing \vdash A$

("Eine Formel ist aus 0 Hypothesen ableitbar gdw sie beweisbar ist (Theorem ist).")

Beweis: (in der Vorlesung)

M3. $\Gamma \vdash A$ gdw für eine endliche Untermenge Δ aus Γ, $\Delta \vdash A$.

Beweis: (in der Vorlesung)

Hausaufgaben: Beweise M4 - M7 in Kapitel V.