1. Sitzung

Vorrede

Dieser Kurs ist ein *fortgeschrittener* Kurs in mathemathischer oder symbolischer Logik in dem Sinne, dass er sich mit fortgeschrittenen Themen befasst - also Themen, die üblicherweise in einem Einführungskurs in die Logik nicht näher betrachtet werden. Er ist nicht in dem Sinne fortgeschritten, dass er einen andern Logik-Kurs voraussetzt. Vorausgesetzt werden in der Theorie nur eine einigermassen schnelle Auffassungsgabe und die Bereitschaft, Übungsaufgaben zu bearbeiten. Spezielle Kenntnisse in Logik werden nicht vorausgesetzt. Natürlich ist es in der Praxis von grossem Nutzen, wenn man schon mal "Baby-Logik" gemacht hat.

Während man in einem Einführungskurs in die Logik mehr den Umgang mit logischen Systemen einübt (Formalisieren, Wahrheitstafelmethode, Konstruktion von formalen Beweisen, etc.), ist dieser Kurs mehr ein Kurs in *Metalogik*. D.h. wir arbeiten hier weniger mit logischen Kalkülen als Werkzeugen, sondern versuchen, wichtige Eigenschaften dieser Kalküle herauszufinden. Der Gegensatz wird vielleicht am besten an einem Bild klar: es ist wie der Gegensatz zwischen **eine Fremdsprache erlernen** und **als Linguist diese Fremdsprache untersuchen**.

Verschiedene Aspekte der Logik

Man kann bei einer Logik vier Aspekte oder Komponenten unterscheiden:

(a) Formale Syntax (Grammatik)

(b) Beweistheorie

(c) Formale Semantik

(d) Anwendung

a und b bilden ein *uninterpretiertes logisches System* ;

wenn man noch c hinzunimmt, spricht man von einem *interpretierten logischen System*.

Bei d interessiert uns vor allem der Zusammenhang zwischen natürlicher Sprache (NL) und Logik (FL).

Wir können hier zwei Richtungen unterscheiden:

(i) NL $\rightarrow$ FL : Formalisieren

(ii) FL $\rightarrow$ NL : informelle Semantik

Theorie der formalen Systeme

Logische Systeme sind ein Spezialfall von *formalen Systemen*.

Syntax - studiert Sprache nur als Menge von Ausdrücken und deren Kombination, ohne jede Beziehung zu ihrer Bedeutung, und die - rein formale - Manipulation von Ausdrücken (*formale* Seite eines formalen Systems). Die wichtigsten Stichworte sind hier

grammatisch wohlgeformter Ausdruck;
Satz;
Axiom;
Beweis;
Ableitung;
Theorem;
Inferenzregel (Schlussregel);
Schluss.

Semantik - beschäftigt sich mit der Bedeutung von Ausdrücken einer Sprache (*inhaltliche* Seite eines formalen Systems). Eine Semantik *interpretiert* die (zunächst uninterpretierten) Ausdrücke einer Sprache. Sie stellt erst die Beziehung zwischen der Sprache und einer "aussersprachlichen" Wirklichkeit ("Welt") her.

Die wichtigsten Stichworte hier sind:

Interpretation;
Bedeutung;
Wahrheit;
Wahrheitswert;
Referenz;
logische Folgerung;
logische Wahrheit;
etc.

Wenn man ein (uninterpretiertes) formales System S einführt, muss man folgende Dinge spezifizieren:

Formales System S = Grammatik (Syntax i.e.S.) + deduktiver Apparat

I. **Grammatik von S**: (1) **Vokabular** (verwendetes Symbolinventar)

(2) **Formationsregeln** (Spezifikation von wohlgeformten Ausdrücken)

II. Deduktiver Apparat von S:

(1) Auszeichnung einer Menge (möglicherweise leer) von Formeln als **Axiome** von S;

(2) Menge von **Schlussregeln**;

(3) Anweisungen zur Erzeugung von **Beweisen**:

(a) ein Axiom kann zu jeder Zeit in einem Beweis hingeschrieben werden;

(b) Schlussregeln können auf Formeln angewandt werden, die schon im Beweis stehen.

Beweis wird auch oft in einem *relationalen* Sinn verwandt:

Π ist ein Beweis der Formel A $=_{df}$

(a) Π ist ein Beweis (in S)

(b) A ist die letzte Formel (Zeile) von

(4) **Theorem** : eine beweisbare Formel

Ein Formales System ist in diesem Sinne wie ein bedeutungsloses Spiel, etwa wie Schach.

(Die Schachfiguren und die Züge bedeuten ja nichts, in dem Sinne, dass sie über das Spiel hinausweisen auf die Welt, z.B. eine Schlacht zwischen zwei Armeen.)

Beispiel eines (nicht-logischen) Formalen Systems

MIU-System in D.Hofstadter, *Gödel, Escher, Bach*. Random House, New York, 1979.

Grammatik von MIU:

(1) Vokabular: 3 Buchstaben: M, I, U

(2) Formationsregeln: jede endliche Verkettung dieser drei Symbole ist eine Formel von MIU.

Deduktiver Apparat von MIU:

(1) ein Axiom: MI

(2) vier Schlussregeln:

I. $XI \rightarrow XIU$

("Eine Formel, die als letztes Symbol I hat, kann wiedergeschrieben werden als diese Formel + U")

(Wir verwenden "X", "Y", "Z", ... als *Metavariable* über beliebige (auch leere) Ketten von MIU.)

II. $MX \rightarrow MXX$

III. $XIIIY \rightarrow XUY$

IV. $XUUY \rightarrow XY$

(Alle diese Regeln sind *1-Prämissen-Regeln*, d.h. sie werden auf eine entsprechende Formel angewandt und liefern eine Formel der angegebenen Form als *Konklusion*.)

(3) Beweis: jede Folge von Formeln, S_1, ..., S_n, so dass jedes S_i ($1 \leq i \leq n$) entweder ein Axiom ist, oder aus früheren Formlen S_j ($j < i$) durch eine der vier Regeln gewonnen wurde.

(4) Theorem: letztes Glied eines Beweises.

(NB: Die Formel MI ist nicht nur Axiom sondern auch Theorem, da die 1-elementige Folge von Formeln

1. MI

auch ein Beweis ist, und zwar ein Beweis von MI.)

Beispiel eines Beweises in MIU:

1.	MI	Axiom
2.	MII	1, II
3.	MIIII	2, II
4.	MIIIIU	3, I
5.	MUIU	4, III
6.	MUIUUIU	5, II
7.	MUIIU	6, IV

Die Zeilennumerierung und der Kommentar rechts von der Formel gehören, streng genommen, nicht zum Beweis; diese *Annotationen* machen das Lesen von Beweisen einfacher.

Solch ein System hat gewisse Eigenschaften, die herauszufinden Aufgabe einer *Metatheorie* ist.

Z.B. wissen wir, dass jedes Theorem die Form MX hat (also mit M beginnt). (Man kann - durch vollständige Induktion - zeigen, dass das anfängliche M des einzigen Axioms nie durch eine Regelanwendung verschwinden kann.)

Kann MU bewiesen werden? D.h. ist MU ein Theorem des Systems MIU?

Gibt es ein Entscheidungsverfahren für Theoreme, d.h. gibt es eine endende mechanische Methode, die einem sagt, ob es für eine Formel X von MIU einen Beweis gibt?

(Die Frage: Gibt es eine Interpretation für MIU? ist eine Frage ganz anderer, inhaltlicher, Art.)

Logische Systeme $\subseteq$ Formale Systeme

Logische Systeme werden normalerweise für einen gewissen Zweck gebaut, z.B. für eine Theorie des gültigen Schlusses, logische Wahrheit, etc.
$\Rightarrow$ Semantik.

Aber man kann logische Systeme natürlich auch losgelöst von ihrer Interpretation, Bedeutung studieren, als zweckfreies Spiel.

Z.B. S_0 in unserem Buch.

I. Grammatik von S_0 :

(1) Vokabular: p, q, r, s

$\supset$, ~

), (

(2) Formationsregeln:

Beispiele für wffs: $(p \supset q)$

$\sim r$

$((p \supset \sim q) \supset (\sim\sim r \supset s))$

Beispiele für nicht-wffs: $) \supset ($

$\sim \supset pq$

$(p \supset \sim q$

Übungsaufgabe: Versuche, die Formationsregeln zu schreiben.

II. Deduktiver Apparat von S_0:

(1) 3 Axiome :

A1: $(p \supset (q \supset p))$

A2: $((p \supset (q \supset r)) \supset ((p \supset q) \supset (p \supset r)))$

A3: $((\sim p \supset \sim q) \supset (q \supset p))$

(2) 2 Schlussregeln:

R1: $\dfrac{A \quad A \supset B}{B}$ (MP) R2: $\dfrac{A}{A\ ^{B}/_{P}}$ (Subst)

($A\ ^{B}/_{P}$ bedeutet hier: die gleichzeitige Ersetzung aller Vorkommen des Satzbuchstabens *P* in *A* durch die Formel *B*.)

(3) Beweis, (4) Theorem - wie üblich

Beispiele für Beweise:

(i) $(p \supset (q \supset p))$ (Beweis der Länge 1)

(ii) $(p \supset (q \supset p))$ (Beweis der Länge 4)

$(p \supset (r \supset p))$

$(r \supset (r \supset r))$

$((\sim p \supset \sim q) \supset (q \supset p))$

(Es gibt einen kürzeren Beweis von $((\sim p \supset \sim q) \supset (q \supset p))$. Welchen?)

Beispiel für einen nicht-trivialen Beweis:

1.	$((p \supset (q \supset r)) \supset ((p \supset q) \supset (p \supset r)))$	A2
2.	$((p \supset (q \supset p)) \supset ((p \supset q) \supset (p \supset p)))$	1, Subst
3.	$(p \supset (q \supset p))$	A1
4.	$((p \supset q) \supset (p \supset p))$	2, 3, MP
5.	$((p \supset (q \supset p)) \supset (p \supset p))$	4, Subst
6.	$(p \supset p)$	3, 5, MP

Informelle Semantik

p, q, r, s	stehen für deklarative Sätze des Deutschen
$\supset$	Konditional (*wenn - dann*)
~	Negation (*nicht*, *un-*, *es ist nicht der Fall, dass*)

Z.B. p : Königin Viktoria starb 1066

q : Ich fresse einen Besen

$(p \supset q)$	Wenn K. V. 1066 starb, fresse ich einen Besen.
$\sim p$	K.V. starb nicht 1066

Es gibt im Deutschen (wie wohl in allen natürlichen Sprachen) viele stilistische Varianten für $\supset$ und ~.

$(p \supset q)$ "wenn p, dann q"

"wenn p, q"

"q, wenn p"

"q, falls p"

"p nur dann, wenn q"

"q vorausgesetzt, dass p"

"q unter der Bedingung, dass p"

"p ist hinreichende Bedingung für q"

"q ist notwendige Bedingung für q"

"q ist ein *sine qua non* für p"

"Bedeutung" der Klammern:

p : Ich werde versetzt

q : Ich bringe mich um

$\sim(p \supset q)$ Ich bring mich nicht um, wenn ich versetzt werde.

(im Sinne von: Es ist nicht der Fall, dass ich mich umbringe, wenn ich versetzt werde)

$(\sim p \supset q)$ Wenn ich nicht versetzt werde, bring ich mich um.

S_0 hat jetzt eine Bedeutung durch diese (informelle) Interpretation. (**Informelle Semantik**)

Zudem können wir jetzt NL in S_0 übersetzen. (**Formalisierung**)

Man kann dies besser oder schlechter machen. Es gibt keine genauen Regeln. (Formalisieren ist daher eine Kunst oder Fertigkeit, die man mit viel Übung erwirbt.)

Wenn Hans nicht krank ist, dann schwänzt er, falls er nicht in der Schule ist.

Die beste Formalisierung ist: $\sim p \supset (\sim q \supset r)$

mit dem "Wörterbuch":

p : Hans ist krank

q : Hans ist in der Schule

r : Hans schwänzt

(Sie ist deshalb die beste, weil sie am meisten (aussagen-) logische Struktur "herausbringt".)

Die einfachste Formalisierung wäre: p

mit dem Wörterbuch:

p : Wenn Hans nicht krank ist, dann schwänzt er, falls er nicht in der Schule ist.

Sie arbeitet überhaupt keine logische Struktur heraus.

Dazwischen gibt es eine Anzahl von Zwischenstufen, z.B.

$\sim p \supset s$

$p \supset r$

$p \supset (q \supset r)$

(Wie lauten die dazugehörigen Wörterbücher?)

Dagegen sind

$\sim r$

$p \supset \sim q$

keine möglichen Formalisierungen des deutschen Satzes in S_0.

Durch Formalisierung verliert man einiges, aber hoffentlich nicht das Wesentliche, d.h. die *logische Struktur* oder *logische Form* der Sätze.

Z.B. möchte man haben, dass die folgenden zwei *Argumente* die gleiche logische Form haben:

Wenn es regnet, dann ist die Strasse nass.

Es regnet nicht.

$\therefore$ Die Strasse ist nicht nass.

Wenn der Mond aus grünem Käse ist, dann fresse ich einen Besen.

Der Mond ist nicht aus grünem Käse.

$\therefore$ Ich fresse keinen Besen.

Die gemeinsame *Form* dieser beiden Argumente ist

$A \supset B$

$\sim A$

$\therefore \sim B$