Einige Semantische Definitionen und Metatheoreme über H_S

(aus Thomason, *Symbolic Logic*, Ch. VI)

D1. Eine *Morphologie* M für H_S ist eine nicht-leere Menge von Objekten, genannt Satzparameter. Die Begriffe "Formel von M", "Theorem von M" und "Ableitbarkeit in M" seien definiert wie in Kapitel V, mit der einzigen Änderung, dass nur Satzparameter aus M betrachtet werden.

D2. Eine *Belegung* einer Morphologie M für H_S ist eine Funktion V, die jedem Satzparameter in M genau einen der Wahrheitswerte W und F zuweist. Seien $P \in$ M und V eine Belegung von M. Dann ist V(P) der Wert, der P durch V zugewiesen wird. D.h. V(P) = W oder V(P) = F.

D3. Sei V eine Belegung einer Morphologie M für H_S. Der Wahrheitswert V(A) einer komplexen Formel A von M unter der Belegung V ist definiert gemäss den folgenden (*semantischen*) *Regeln*:

1.Wenn $A = B \supset C$, dann gilt: V(A) = W, wenn V(B) = F oder V(C) = W, und V(A) = F in allen andern Fällen.

2. Wenn $A = \sim B$, dann gilt: V(A) = W, wenn V(B) = F, und V(A) = F in allen andern Fällen.

D4. Eine Formel A von M ist *erfüllbar*, wenn es eine Belegung V von M gibt, so dass V(A) = W.

D5. Eine Formel A von M ist *gültig*, wenn für jede Belegung V von M gilt: V(A) = W. (Wir verwenden die Abkürzung "$\vdash A$" für "A ist gültig".)

D6. Sei Γ eine Menge von Formeln von M, und V eine Belegung von M. Die Belegung V *erfüllt* Γ *simultan*, wenn V jede Formel in Γ erfüllt.

D7. Sei Γ eine Menge von Formeln von M. Γ ist *simultan erfüllbar*, wenn es eine Belegung V von M gibt, die Γ simultan erfüllt.

D8. Sei Γ eine Menge von Formeln von M und A eine Formel von M. Γ *impliziert* (*logisch*, *semantisch*) A (abgekürzt: $\Gamma \vdash A$), wenn jede Belegung von M, die Γ simultan erfüllt, auch A erfüllt.

M1. Sei M eine Morphologie für H_S und V eine Belegung von M. Jede Formel A von M erhält durch V einen eindeutig bestimmten Wert W oder F.

M2. Seien M und M' Morphologien für H_S und sei M' $\subseteq$ M (d.h. M' ist Untermorphologie von M). Sei V eine Belegung von M und sei V' die Einschränkung von V auf M'; d.h. sei V'(P) = V(P) für alle $P \in$ M', und sei V' undefiniert für P $\notin$ M'. Dann gilt für alle Formeln A von M': V(A) = V'(A).

M3. Seien M und M' Morphologien für H_S und sei A eine Formeln von M sowie M'. Dann gibt es eine Belegung von M, die A erfüllt gdw es gibt eine Belegung von M', die A erfüllt.

M5. $\vdash A$ gdw $\sim A$ ist nicht erfüllbar. ("$\vdash A$" steht für "A ist gültig")

M6. A ist erfüllbar gdw nicht -$\vdash \sim A$

M7. Seien A und B Formeln von M, und sei A' das Resultat der Substitution von B für P in A, wobei P ein Satzparameter von M sei. Dann gilt: Wenn $\vdash A$, so auch $\vdash A'$. (Substitution)

M8. Sei $\{A_1, ..., A_n\}$ eine endliche Menge von Formel einer Morphologie M, und sei V eine Belegung von M. Dann erfüllt V $\{A_1, ..., A_n\}$ simultan gdw V erfüllt $A_1 \wedge ... \wedge A_n$.

M9. Sei Γ eine Menge von Formeln einer Morphologie M, und sei V eine Belegung von M. Dann erfüllt V Γ simultan gdw für alle endlichen Untermengen $\{A_1, ..., A_n\}$ von Γ gilt: V erfüllt $A_1 \wedge ... \wedge A_n$.

M10. Sei Γ eine Menge von Formeln einer Morphologie M, und sei V eine Belegung von M. Dann gilt: Wenn V Γ simultan erfüllt, dann erfüllt V simultan jede Untermenge von Γ.

M13. Wenn eine Menge Γ von Formeln simultan erfüllbar ist, dann ist jede Untermenge von Γ simultan erfüllbar.

M14. $\{A\}$ ist simultan erfüllbar gdw A ist erfüllbar.

M15. Wenn Γ simultan erfüllbar ist und A ist gültig ($\vdash A$), dann ist auch $\Gamma \cup \{A\}$ simultan erfüllbar.

M17. $\Gamma \vdash A$ gdw $\Gamma \cup \{\sim A\}$ ist nicht simultan erfüllbar.

M18. $\varnothing \vdash A$ gdw $\vdash A$ (A folgt aus der leeren Menge gdw A gültig ist.)

M19. Wenn $A \in \Gamma$, dann $\Gamma \vdash A$.

M20. Wenn $\Gamma \vdash A$, dann $\Gamma \cup \Delta \vdash A$.

M21. Wenn $\Gamma \vdash A$ und $\Delta \cup \{A\} \vdash B$, dann $\Gamma \cup \Delta \vdash B$.

M22. Wenn $\Gamma \vdash A \supset B$, dann $\Gamma \cup \{A\} \vdash B$.

M23. Wenn $\Gamma \cup \{A\} \vdash B$, dann $\Gamma \vdash A \supset B$.

M24. Seien A und B Formeln von M, und sei V eine Belegung von M. Dann gilt: V($A \vee B$) = W gdw V(A) = W oder V(B) = W (oder beides).