Einige Semantische Definitionen und Metatheoreme über $H_{P=}$

(aus Thomason, *Symbolic Logic*, Ch. XI)

D1. Eine i-stellige Relation (i > 1) über einem Individuenbereich (kurz: Bereich, engl. *domain*) D ist eine Untermenge des Kartesischen Produkts D^i.

D2. Sei D eine nicht-leere Menge. Eine *Interpretation* einer Morphologie M für $H_{P=}$ über dem Bereich D ist eine Funktion V, die folgendes zuweist:

1. Jeder Individuenkonstante c von M einen eindeutigen Wert $V(c) \in D$.
2. Jedem Individuenparameter u von M einen eindeutigen Wert $V(u) \in D$.
3. Jedem 0-stelligen Prädikatenparameter P von M einen eindeutigen Wahrheitswert $V(P)$, der entweder W oder F ist.
4. Jedem i-stelligen Prädikatenparameter Q von M (i > 1) eine Untermenge $V(Q)$ des Kartesischen Produkts D^i.

D3. Sei V eine Interpretation einer Morphologie M für $H_{P=}$ über dem Bereich D, und seien $u \in IP_M$ und $d \in D$. Das Ergebnis V^d/u der semantischen Substitution von d für den Wert, den V dem Parameter u zuweist, ist die Interpretation von M, die jedem Symbol von M verschieden von u den gleichen Wert zuweist wie V, und die u den Wert d zuweist. D.h. V^d/u ist wie V, ausser (mit dem möglichen Unterschied) dass $V^d/u(u) = d$.

D4. Sei V eine Interpretation einer Morphologie M für $H_{P=}$ über dem Bereich D, und sei A eine atomare Formel von M. Für den Fall, dass A ein 0-stelliger Prädikatenparameter ist, ist der Wahrheitswert $V(A)$ von A schon durch D2 gegeben. In den übrigen Fällen wird $V(A)$ wie folgt festgelegt:

1. $V(Pt_1...t_n) = W$ wenn $\langle V(t_1), ..., V(t_n)\rangle \in V(P)$, sonst $V(Pt_1...t_n) = F$.
2. $V(s = t) = W$, wenn $V(s)$ identisch ist mit $V(t)$, sonst $V(s = t) = F$.

D5. Sei V eine Interpretation einer Morphologie M für $H_{P=}$ über dem Bereich D. Der Wahrheitswert einer komplexen Formel A von M wird gemäss der folgenden semantischen Regeln festgelegt.

1. Wenn $A = B \supset C$, dann gilt: $V(A) = W$, wenn $V(B) = F$ oder $V(C) = W$, und $V(A) = F$ in allen andern Fällen.

2. Wenn $A = \sim B$, dann gilt: $V(A) = W$, wenn $V(B) = F$, und $V(A) = F$ in allen andern Fällen.

3. Wenn $A = (x)B^x/u$ und u frei ist für x in B., dann $V(A) = W$, wenn für alle $d \in D$ gilt: $V^d/u(B) = W$, und $V(A) = F$ in allen andern Fällen.

D6. Eine Formel A von M ist *erfüllbar*, wenn es einen nicht-leeren Bereich D gibt und eine Interpretation V von M über D, so dass $V(A) = W$.

D7. Eine Formel A von M ist *gültig*, wenn für alle nicht-leeren Bereiche D und alle Interpretationen V von M über D gilt: $V(A) = W$.
(Wir verwenden die Abkürzung "$\|\!-A$" für "A ist gültig".)

D8. Eine Formel A von M ist *erfüllbar in* D, wobei D ein nicht-leerer Bereich ist, wenn es eine Interpretation V von M über D gibt, so dass $V(A) = W$.

D9. Eine Formel A von M ist *gültig in* D, wobei D ein nicht-leerer Bereich ist, wenn für alle Interpretationen V von M über D gilt: $V(A) = W$.
(Wir verwenden die Abkürzung "$D\|\!- A$" für "A ist gültig in D".)

(entsprechende auf D relativierte Definitionen gibt es auch für simultane Erfüllbarkeit und semantische Implikation)

D10. Sei V eine relationale Struktur vom Typ M über D und sei V´ eine relationale Struktur vom Typ M über D´, für eine Morphologie M für $H_{P=}$ und zwei nicht-leere Bereiche D und D´. Eine Funktion ϕ, die Elemente von D auf Elemente von D´ abbildet, heisst *Isomorphismus von* V *und* V´, wenn

1. ϕ ist eine 1-1 Funktion von D auf D´;
2. für alle Terme t von M, $\phi(V(t)) = V'(t)$;
3. für alle n-stelligen Prädikatenparameter P von M (n > 0) und $d_1, ..., d_n$ in D, $\langle d_1, ..., d_n\rangle \in V(P)$ gdw $\langle\phi(d_1), ..., \phi(d_n)\rangle \in V'(P)$.

V heisst *isomorph zu* V´, wenn für alle $P \in P_M{}^0$ gilt: $V(P) = V'(P)$, und es gibt einen Isomorphismus von V und V´.

D11. Sei Γ eine Menge von Formeln von M. Γ ist *simultan erfüllbar*, wenn es eine Interpretation V von M gibt, die jede Formel in Γ erfüllt.

D12. Sei Γ eine Menge von Formeln von M und A eine Formel von M. Γ *impliziert* (*logisch*, *semantisch*) A (abgekürzt: $\Gamma \|\!- A$), wenn jede Interpretation von M, die Γ simultan erfüllt, auch A erfüllt.

M1. Sei M eine Morphologie für $H_{P=}$ und V eine Interpretation von M über dem Bereich D. Dann erhält jede Formel A von M durch V einen eindeutig bestimmten Wert W oder F.

M2. Sei V eine Interpretation von M über dem Bereich D, und sei $(\exists x)A^x/u$ eine Formel von M. Dann ist $V((\exists x)A^x/u) = W$ gdw es gibt mindestens ein $d \in D$ so dass gilt: $V^d/u(A) = W$.

M3. $D\|\!- A$ gdw $\sim A$ ist nicht erfüllbar in D. ("$D\|\!- A$" steht für "A ist gültig in D")

M4. A ist erfüllbar in D gdw nicht-$D\|\!- \sim A$

M5. $\|\!-\, A$ **gdw** $\sim A$ **ist nicht erfüllbar.** ("$\|\!-\, A$" steht für "A ist gültig")

M6. **A ist erfüllbar gdw nicht-**$\|\!-\, \sim A$

(M7 - M9 sind über die Unabhängigkeit bestimmter semantischer Begriffe von der jeweiligen Morphologie, ähnlich wie für H_S.)

M10 - M12 sowie M30 und M31 betreffen die Konstanz semantischer Begriffe bezüglich isomorpher Strukturen. Es kommt nicht auf bestimmte Bereiche an, sondern nur auf deren Mächtigkeit.

M10. **Sei M eine Morphologie und seien V und V´ isomorphe relationale Strukturen vom Typ M, mit den entsprechenden Bereichen D und D´. Dann gilt für alle Formeln A von M:** $V(A) = V'(A)$.

M11. **Wenn D und D´ nicht-leere Bereiche mit derselben Mächtigkeit sind, dann ist** A **erfüllbar in D gdw** A **ist erfüllbar in D´.**

M12. **Wenn D und D´ nicht-leere Bereiche mit derselben Mächtigkeit sind, dann ist** A **gültig in D gdw** A **ist gültig in D´ (D**$\|\!-\, A$ **gdw D´**$\|\!-\, A$**).**

M13. **Sei** $\{A_1, ..., A_n\}$ **eine endliche Menge von Formel einer Morphologie M für** $H_{P=}$ **und sei V eine Interpretation von M. Dann erfüllt V** $\{A_1, ..., A_n\}$ **simultan gdw V erfüllt** $A_1 \wedge ... \wedge A_n$.

M14. **Sei** Γ **eine Menge von Formeln einer Morphologie M für** $H_{P=}$ **und sei V eine Interpretation von M. Dann erfüllt V** Γ **simultan gdw für alle endlichen Untermengen** $\{A_1, ..., A_n\}$ **von** Γ **gilt: V erfüllt** $A_1 \wedge ... \wedge A_n$.

M15. **Sei** Γ **eine Menge von Formeln einer Morphologie M für** $H_{P=}$ **und sei V eine Interpretation von M. Dann gilt: Wenn V** Γ **simultan erfüllt, dann erfüllt V simultan jede Untermenge von** Γ **.**

M18. **Wenn eine Menge** Γ **von Formeln simultan erfüllbar ist, dann ist jede Untermenge von** Γ **simultan erfüllbar.**

M19. $\{A\}$ **ist simultan erfüllbar gdw** A **ist erfüllbar.**

M20. **Wenn** Γ **simultan erfüllbar ist und A ist gültig (** $\|\!-\, A$ **), dann ist auch** $\Gamma \cup \{A\}$ **simultan erfüllbar.**

M22. $\Gamma \|\!-\, A$ **gdw** $\Gamma \cup \{\sim A\}$ **ist nicht simultan erfüllbar.**

M23. $\varnothing \|\!-\, A$ **gdw** $\|\!-\, A$ (A folgt aus der leeren Menge gdw A gültig ist.)

M24. **Wenn** $A \in \Gamma$, **dann** $\Gamma \|\!-\, A$.

M25. **Wenn** $\Gamma \|\!-\, A$, **dann** $\Gamma \cup \Delta \|\!-\, A$.

M26. **Wenn** $\Gamma \|\!-\, A$ **und** $\Delta \cup \{A\} \|\!-\, B$, **dann** $\Gamma \cup \Delta \|\!-\, B$.

M27. **Wenn** $\Gamma \|\!-\, A \supset B$, **dann** $\Gamma \cup \{A\} \|\!-\, B$.

M28. **Wenn** $\Gamma \cup \{A\} \|\!-\, B$, **dann** $\Gamma \|\!-\, A \supset B$.

M29. **Wenn** $\|\!-\, A$ **und** u **ist frei für** x **in** A **, dann** $\|\!-\, (x)A^x/u$.

M30. **Wenn D und D´ nicht-leere Bereiche sind mit der gleichen Mächtigkeit, dann ist** Γ **simultan erfüllbar in D gdw** Γ **ist simultan erfüllbar in D´.**

M31. **Wenn D und D´ nicht-leere Bereiche sind mit der gleichen Mächtigkeit, dann impliziert** Γ **die Formel** A **in D gdw** Γ **impliziert** A **in D´.**

M32. **Für alle Interpretationen V über einem Bereich gilt:** $V(A^t/u) = V^{V(t)/u}(A)$.
("Syntaktische und semantische Substitution haben den gleichen Effekt.")