Einige Definitionen und Metatheoreme über $HP_=$

(aus Thomason, *Symbolic Logic*, Ch. XII)

D1. **Sei Γ eine Menge von Formeln einer Morphologie M für $HP_=$. Γ ist M-gesättigt, wenn gilt:**

1) **Für alle Formeln A von M, $A \in \Gamma$ oder $\sim A \in \Gamma$.**
2) **Γ ist konsistent.**
3) **Für alle Formeln A, Individuenparameter u und Individuenvariablen x von M:**
   Wenn u frei ist für x in A und $A^t/u \in \Gamma$, für alle Terme $t \in T_M$, dann $(x)A^x/u \in \Gamma$.

(Intuitiv bedeutet die letzte Klausel dieser Definition, dass in M-gesättigten Mengen alle Dinge einenn Namen haben.)

D2. **Sei M eine Morphologie für $HP_=$ (wobei F_M abzählbar sein soll), und seien u_1, u_2, u_3, ... verschiedene Zeichen, die in keiner Kategorie von M vorkommen. Sei M´ wie M ausser dass $IP_{M'} = IP_M \cup \{u_1, u_2, u_3, ...\}$. Dann nennnen wir M´ eine S-Erweiterung von M.**

(Die u_i dienen als Namen für die "eventuell noch nicht benannten Dinge".)

Einige Metatheoreme über M-gesättigte Mengen (M6 - M12):

M6. **Wenn Γ M-gesättigt ist, $A \in F_M$ und $\Gamma \vdash A$, dann $A \in \Gamma$.**

M7. **Wenn Γ M-gesättigt ist, $A \in F_M$, dann $\Gamma \vdash A$ gdw $A \in \Gamma$.**

M8. **Wenn Γ M-gesättigt ist, $A \in F_M$, dann $A \in \Gamma$ gdw $\sim A \notin \Gamma$.**

M9. **Wenn Γ M-gesättigt ist, $A, B \in F_M$, dann $A \supset B \in \Gamma$ gdw $A \notin \Gamma$ oder $B \in \Gamma$.**

M10. **Wenn Γ M-gesättigt ist und $\Gamma \subseteq \Delta$, wobei Δ eine konsistente Menge von Formeln von M ist, dann gilt $\Gamma = \Delta$.**

M11. **Wenn Γ M-gesättigt ist, $A \in F_M$, $u \in IP_M$, $x \in V_M$, und u frei ist für x in A, dann $(x)A^x/u \in \Gamma$ gdw $A^t/u \in \Gamma$, für alle Terme $t \in T_M$.**

M12. **Wenn**

(a) für alle Formeln A von M gilt: $A \in \Gamma$ oder $\sim A \in \Gamma$;
(b) Γ konsistent ist; und
(c) für alle Formeln A, Individuenparameter u und Individuenvariablen x von M, so dass u frei ist für x in A, es einen Term t von M gibt, so dass $(\exists x)A^x/u \supset A^t/u \in \Gamma$;

dann ist Γ M-gesättigt.

(M12 besagt, dass die Klausel (c) sozusagen eine Reformulierung der Bedingung (3) von D1 ist; eine Reformulierung der Bedingung, dass es in M-gesättigten Mengen keine namenlosen Dinge geben darf.)

M13. **Sei Γ eine konsistente Menge von Formeln einer Morphologie M für $HP_=$ und sei M´ eine S-Erweiterung von M. Dann gibt es eine konsistente Menge Δ von Formeln von M´, so dass für alle Formeln A, Individuenparameter u und Individuenvariablen x von M´ gilt: wenn u frei ist für x in A, dann gibt es einen Individuenparameter v von M´, so dass gilt: $(\exists x)A^x/u \supset A^v/u \in \Delta$ und $\Gamma \subseteq \Delta$.**

(M13 besagt, dass man konsistente Mengen Γ von Formeln von M zu Mengen erweitern kann, in denen "alles einen Namen hat", und dies unter Beibehaltung der Konsistenz. Allerdings muss man hierzu die Morphologie M um abzählbar unendlich viele neue Terme erweitern (S-Erweiterung).)