Mathematische Grundlagen der Linguistik II

Übungsblatt 6: Kontextfreie Sprachen

1. Sei $G = (V, \Sigma, R, S)$, wo $V = \{S, A, B, a, b\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ und
$R = \{ S \rightarrow aB,\ S \rightarrow bA,$
$A \rightarrow a,\ A \rightarrow aS,\ A \rightarrow bAA,$
$B \rightarrow b,\ B \rightarrow bS,\ B \rightarrow aBB \}$

   a) Beweise:

   Wenn $w \in V^*$ und $S \overset{+}{\underset{G}{\Rightarrow}} w$,

   dann: $\#a$'s in w + $\#A$'s in w = $\#b$'s in w + $\#B$'s in w .

   (# = "Zahl der")

   Hinweis: Induktion über Ableitungslänge!

   b) (a) zeigt uns, daß $L(G) \subseteq \{w \in \{a, b\}^+ : \#a\text{'s in } w = \#b\text{'s in } w\}$.

   Zeige jetzt, daß $L(G) = \{w \in \{a, b\}^+ : \#a\text{'s in } w = \#b\text{'s in } w\}$.

   Hinweis: Zeige durch Induktion über Wortlänge, daß

   $w \in \{w \in \{a, b\}^+ : \#a\text{'s in } w = \#b\text{'s in } w\} \Rightarrow w \in L(G)$.

2. Beweise die folgende starke Version des Pumping-Lemmas für kontextfreie Sprachen:

   Sei G eine kontextfreie Grammatik.
   Dann gibt es Zahlen K und k, so daß für jede Zeichenkette $w \in L(G)$,
   wo $|w| > K$, folgendes gilt:

   Es gibt Zeichenketten $u, v, x, y, z \in \Sigma^*$ so daß:

   1) $w = uvxyz$
   2) mindestens eine von v und y ist nicht e
   3) Für jede $n \geq 0$: $uv^nxy^nz \in L$
   4) $|vxy| \leq k$

   Hinweis: Die zusätzliche Bedingung (4) läßt sich durch genaue Betrachtung des Beweises der ursprünglichen Version des Lemmas ableiten.

3. Wende (2) an, um folgendes zu beweisen:

   COPY = $\{ww : w \in \{a, b\}^*\}$ ist *nicht* kontextfrei!