Math.Grundlagen I - Erste Probeklausur

(Zeit: 45 Minuten; 75 Punkte + 6 Bonuspunkte)

1. Kurzfragen zur **Mengenlehre**

Beantworten Sie folgende Fragen durch Ankreuzen oder Eintragen der Lösung. (18 Punkte)

	wahr
a) $\{2\} \in \{1, 2, 3\}$	❑
b) $\{2\} \cup \{1\} \in \{\{1,2\}, 2\}$	❑
c) $\{2\} \cap \{1,2\} \subseteq \{\{1,2\}, 2\}$	❑
d) $\emptyset \subset \mathcal{P}(\{\emptyset\})$	❑
e) der Abendstern $\in$ {Saturn, Venus}	❑
f) {der Morgst., Venus} $\subset$ {Saturn, Venus}	❑

Sei f die Funktion $f(x) = 2x$ und g die Funktion $g(x) = x^2$, wobei $f,g \in \mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ Beantworte folgende Fragen:

	wahr
g) $<2, 4> \in f$	❑
h $<2, 4> \in g$	❑
i) $<3, 9> \in f$	❑
j) g ist bijektiv	❑
k) $g \circ f(3) =$	.....
l) $f \circ g(3) =$	.....

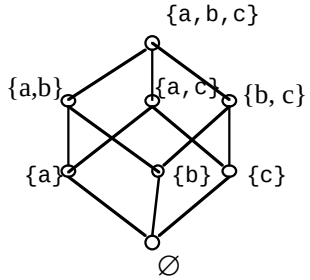
Algebren, Gruppen, Verbände

2. Beantworten Sie für die gegebene Algebra folgende Fragen (Box ankreuzen!). (5 Punkte)

$\mathcal{z} = <\mathbf{Z}, \cdot>$, wobei $\mathbf{Z}$ die Menge der ganzen Zahlen ist, und $\cdot$ die Multiplikation zweier ganzer Zahlen.

	ja	
$\cdot$ ist assoziativ	❑	
es gibt ein neutrales Element	❑	wenn ja, welches? .....
jedes Element hat ein Inverses	❑	wenn ja, was ist das Inv. von 5? .....
$\mathcal{z}$ ist eine Halbgruppe	❑	
$\mathcal{z}$ ist ein Monoid	❑	
$\mathcal{z}$ ist eine Gruppe	❑	

3. Gegeben sei folgender Verband $<\mathcal{P}(\{a, b, c\}), \subseteq>$

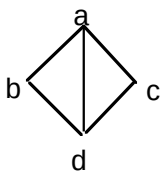


Bestimmen Sie folgendes: (4 Punkte)

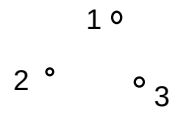
(ii) obere Schranken von $\{\{a\}, \{b\}\}$ =
(iii) $\sup(\mathcal{P}(\{a, b, c\}))$ =
(iv) $\inf\{\{a\}, \{b, c\}\}$ =

4. Welche der folgenden 2 Halbordnungen sind Verbände? Wenn nicht, begünden Sie kurz ihre Antwort. (3 Punkte)

a)



b)



Aussagenlogik

5. **Formalisieren** Sie die folgenden Sätze in **AL**. Verwenden Sie dabei das angegebene "Wörterbuch". Schreiben Sie die Lösungen direkt hinter den deutschen Satz. (15 Punkte)

K : Karl läuft.	W : Das Wetter ist gut.
L : Ludwig läuft.	F : Karl ist gut in Form.
M: Maria läuft.	

a) Karl läuft nur, wenn mindestens einer von den andern läuft.

b) Wenn Karl gut in Form ist, dann läuft er, vorausgesetzt Maria läuft auch.

c) Ludwig läuft dann, und nur dann, wenn keiner der andern beiden läuft und das Wetter gut ist.

6. Bestimmen Sie mit der **vollständigen Wahrheitstafelmethode** , ob $I \supset (J \vee K)$, $(J \,\&\, K) \supset \sim I \;/\therefore\; I \supset K$ ein AL-gültiges Argument ist. Benützen Sie ein separates Blatt. (12 Punkte)

7. Verwenden Sie für die folgende Aufgabe nur die **Kurze Wahrheitstafelmethode**.
Arbeiten Sie in dem vorgegebenen Raum.

Eine korrekte Lösung besteht aus folgenden drei Teilen:
1) Kreisen Sie die **Wahrheitswerte** unter dem Hauptkonnektiv jeder Formel, nach denen Sie suchen, ein.
2) Geben Sie in dem Kasten eine **Belegung** an, die das erforderliche zeigt, oder lassen Sie den Kasten frei, wenn es keine entsprechende Belegung gibt.
3) Beantworten Sie die Aufgabe **explizit**, z.B. schreiben Sie "Die angegeb. Menge ist/ist nicht AL-simultan erfüllbar".

Bestimmen Sie, ob $(P \,\&\, Q) \supset R$ mit $P \vee \sim (R \,\&\, \sim Q)$ **AL-äquivalent** ist. (8 Punkte)

P	Q	R

8. Beweisen Sie folgendes **semantisches Metatheorem**: (10 Punkte)

Wenn *A* logisch wahr ist, dann gilt $\Gamma \models A$, für jede Menge Γ.

BONUSAUFGABEN (je 3 Punkte):

Es gibt **zwei** Bonusaufgaben, die etwas schwieriger sind als die Aufgaben im Hauptteil; z.B. ein semantischer Beweis und ein mengentheoretischer Beweis.