Mathematische Grundlagen der Linguistik I:

Mengenlehre, Algebra, Logik

Vorlesung mit Übung

WS 2001/02

Dr. Werner Saurer
FR 4.7 Allgemeine Linguistik
Computerlinguistik
Universität des Saarlandes
66041 Saarbrücken

Inhalt

Einführung: Was ist Logik?

1. Die Logik beschäftigt sich mit dem *Denken*. Aber anders als die Psychologie, die das Denken empirisch und beschreibend (was ist) untersucht, befasst sich die Logik mit dem Denken als *normative*, *präskriptive* Wissenschaft (was sein soll, was "gutes" Denken ausmacht).

2. Als Bausteine oder Einheiten des Denkens können wir Schlüsse oder *Argumente* betrachten.

Beispiele von Argumenten:

(1) Wenn es regnet, ist die Strasse nass.
Es regnet.
<u>Also</u> ist die Strasse nass.

(2) Wenn es regnet, ist die Strasse nass.
Es regnet nicht.
∴ Die Strasse ist nicht nass.

(3) Wenn Sokrates ein Mensch ist, dann ist er sterblich.
Nun ist Sokrates kein Mensch.
<u>Folglich</u> ist er auch nicht sterblich

(4) Hans ist gross und dick.
<u>Somit</u> ist er dick.

(5) Es gibt unendlich viele natürliche Zahlen.
Für jede natürliche Zahl n gibt es eine Primzahl m mit $m \geq n$.
<u>Damit ist bewiesen, dass</u> es unendlich viele Primzahlen gibt.

3. Wie können wir Argumente charakterisieren?

Ein Argument beinhaltet

a) eine endliche Folge von deklarativen Sätzen, $<S_1, ..., S_n>$, $n \geq 2$.

b) die ersten n-1 Sätze heissen Prämissen, der letzte Konklusion

c) eine mehr oder weniger implizite *Behauptung*, dass die Prämissen die Konlusion *begründen* oder *stützen*.

(Im Kontext erscheinen die Argumente im allgemeinen nicht in der in den Beispielen exemplifizierten *Standardform* (Prämissen vor Konklusion, jeder Satz beginnt in neuer Zeile, etc.). Man kann sie jedoch immer in diese Standardform bringen, und es ist ratsam, das in jedem Fall zu tun.)

4. Die unter 3c erwähnte Behauptung können wir in einem starken oder einem schwächeren Sinne verstehen.

a) <u>stark</u>: Die Wahrheit der Prämissen garantiert mit absoluter Gewissheit (100 %ig) die Wahrheit der Konklusion. Argumente, die eine solch starke Behauptung beinhalten, nennen wir *deduktive* Argumente, und die entsprechende Logik *deduktive Logik*.

b) <u>schwächer</u>: Die Wahrheit der Prämissen garantiert mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit (< 100%), dass auch die Konklusion wahr ist. Solche Argumente nennt man *induktive* Argumente, und die entsprechende Logik *induktive Logik*.

5. Diese Vorlesung beschäftigt sich nur mit der deduktiven Logik.

6. Bei einem "guten" deduktiven Argument stimmt die Behauptung. D.h. es gibt *keinen* Fall, wo die Prämissen wahr sind, die Konklusion jedoch falsch ist. Immer wenn die Prämissen wahr sind, ist auch die Konklusion wahr. (Beachte den Konditional!!) Solche guten deduktiven Argumente nennen wir (*logisch*) *gültig*.

Bei einem "schlechten" deduktiven Argument stimmt die Behauptung nicht. D.h. es gibt wenigstens einen Fall (Situation, etc.) wo die Prämissen wahr sind, die Konklusion jedoch falsch ist. Solche schlechten deduktiven Argumente nennen wir (*logisch*) *ungültig*.

7. Die Logik ist im doppelten Sinn eine *formale* Wissenschaft. Auf den Inhalt der Argumente kommt es nicht an, sondern nur auf ihre *Form*. Z.B. haben die Argumente 2 und 3 oben eine gemeinsame (ungültige) Form, nämlich die Form:

Wenn A, dann B.

Nun nicht-A.

∴ Nicht-B.

Die Logik ist die Theorie von diesen *Argumentformen* oder *Schlussweisen*. Es gibt unendlich viele gültige und ungültige Schlussweisen, und eine Aufgabe der Logik ist es, Methoden zu entwickeln, die es erlauben, die gültigen von den ungültigen zu unterscheiden.

8. Unsere Vorgehensweise wird sein, formale Systeme zu konstruieren, die präziser und einfacher sind als die natürlichen Sprachen, aber dennoch in einem erkennbaren Zusammenhang mit den natürlichen Sprachen stehen (sie sollen *Formalisierungen* der natürlichen Sprachen sein). Dadurch lässt sich von den formalen Systemen auf die natürlichen Sprachen zurückschliessen.

9. Formale Systeme kann man unter 4 Aspekten studieren:

a) Grammatik (Syntax i.e.S.)

b) Semantik

c) Beweistheorie (Syntax i.w.S.)

d) Anwendung

zu a) Die Grammatik beschäftigt sich mit den zulässigen Zeichen und den zulässigen Kombinationen von Zeichen einer Sprache. Ein zentraler Begriff ist der der *Wohlgeformtheit* oder *Grammatikalität* von Ausdrücken. Da interessante Sprachen meist unendlich sind, muss ihre Grammatik *rekursive Regeln* enthalten.

zu b) Die Semantik befasst sich mit der Beziehung zwischen Sprache und "Welt", also dem, auf das sich sprachliche Ausdrücke "beziehen". Zentrale Begriffe sind hier *Bedeutung*, *Wahrheitswert*, *Interpretation*, *Erfüllbarkeit*, *logische Wahrheit*, *logische Äquivalenz*, *logische Folgerung*, etc..

zu c) Die Beweistheorie befasst sich mit der formalen, vom Inhalt oder der Bedeutung absehenden, Manipulation von Zeichen und Ausdrücken. Zentrale Begriffe sind hier *Axiom*, *Schlussregel*, *Beweis*, *Ableitung*, *Beweisbarkeit*, *Ableitbarkeit*, (*syntaktische*) *Konsistenz*, etc..

zu d) Formale Systeme werden normalerweise konstruiert, um sie auf bestimmte Probleme anzuwenden. So kann man z.B. mit der Aussagen- und Prädikatenlogik bestimmte natürlich-sprachliche Argumente *formalisieren*. Durch die Beziehung zu natürlich-sprachlichen Objekten erhalten die formalen Sprachen andererseits eine Bedeutung zugewiesen (*informelle Semantik*, im Gegensatz zur formalen Semantik).

a ist grundlegend und wird von allen andern Aspekten vorausgesetzt. (uninterpretierte Sprache)

a + b : interpretierte Sprache

a + c : uninterpretiertes formales System

a + d : Formalisierung und informelle Semantik

10. Wir beginnen die Vorlesung mit dem Studium der *elementaren Mengenlehre*. Mengentheoretische Begriffe tauchen in der Logik überall auf. Das Deutsche bereichert durch die Mengenlehre ist ge-wissermassen unsere *Metasprache*, die wir zum genauen Sprechen über unseren Gegenstandsbereich (*Objektsprache*) gebrauchen.

11. Danach werden wir uns kurz mit der *Algebra* und *Verbandstheorie* beschäftigen. D.h. wir werden bestimmte algebraische Strukturen betrachten, die in der Linguistik wichtige Anwendungen haben, wie z.B. Monoide, Halbgruppen, Gruppen, Halbordnungen, Verbände, Halbverbände.

(Sehr) Elementare Mengenlehre

Georg Cantors "Definition" einer Menge: eine *Menge* ist eine Zusammenfassung von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen. Diese Objekte heissen auch die *Elemente* der Menge.

Konvention 1-1:

$X, Y, \ldots$ Mengenvariablen (d.h. diese Zeichen stehen für beliebige Mengen)

$x, y, \ldots$ allgemeine Variablen (d.h. diese Zeichen stehen für beliebige Objekte)

Grundbegriff der Mengenlehre:

$\in$ die Elementbeziehung

("$x \in X$" steht für "x ist Element der Menge X")

Definition:

$x \notin X$ gdw es ist nicht der Fall, dass $x \in X$
(Kurzform: nicht ($x \in X$))

Extensionalitätsaxiom (*extensionality*) 1-2:

Wenn gilt: für alle x, $x \in X$ gdw $x \in Y$, dann gilt: $X = Y$.

(Kommentar: dies besagt, dass Mengen genau durch ihre Elemente bestimmt sind. Dieses Axiom wird üblicherweise benützt, wenn das Ziel ist, die Gleichheit zweier Mengen zu beweisen.)

Definition (Untermenge, *subset*) 1-3:

$X \subseteq Y$ gdw für alle x: wenn $x \in X$, dann $x \in Y$.

Definition (echte Untermenge, *proper subset*) 1-4:

$X \subset Y$ gdw $X \subseteq Y$ und es gibt ein x so dass gilt: $x \in Y$ und $x \notin X$.

(äquivalent: $X \subset Y$ gdw $X \subseteq Y$ und $X \neq Y$)

Definition (leere Menge, *empty set*) 1-5:

für alle x, $x \notin \varnothing$

Definition (Universum, *universe*) 1-6:

für alle x, $x \in U$

(Kommentar: dies sollte nur verwendet werden, wenn der Bereich von "x" auf ein festgelegtes Universum beschränkt ist.)

Definition (Durchschnittsmenge, *intersection*) 1-7:

$x \in X \cap Y$ gdw $x \in X$ und $x \in Y$.

Definition (Vereinigungsmenge, *union*) 1-8:

$x \in X \cup Y$ gdw $x \in X$ oder $x \in Y$.

Definition (relative Komplementmenge, *relative complement*) 1-9:

$x \in (X - Y)$ gdw $x \in X$ aber $x \notin Y$.

Definition (Komplementmenge, *complement*) 1-10:

$x \in -X$ gdw $x \in (U - X)$.

(Kommentar: wobei U schon als ein festgelegtes Universum definiert sein soll.)

Definition (ungeordnetes n-tupel, *unordered n-tuple*) 1-11:

$x \in \{a_1, \ldots, a_n\}$ gdw $x = a_1$ oder ... oder $x = a_n$.

Definition (Potenzmenge, *power set*) 1-12:

$X \in \mathcal{P}(Y)$ gdw $X \subseteq Y$.

(Kommentar: die Potenzmenge $\mathcal{P}(Y)$ einer Menge Y ist die Menge (Familie) aller Untermengen X von Y. X ist also ein *Element* von $\mathcal{P}(Y)$ gdw es eine *Untermenge* von Y ist.)

Definition (Abstraktion, *abstraction*) 1-13:

$y \in \{x: A(x)\}$ gdw $A(y)$

(Kommentar: $A(x)$ ist hier eine Aussage über x, z.B. "x ist eine natürliche Zahl und $x \geq 5$ und $x < 10$". Dies ist die Bestimmung einer Menge durch eine Eigen-schaft. Man sollte Abstraktion nur dann verwend-en, wenn der Bereich von "x" von vornherein fest-gelegt ist, sonst führt die Definition zu Inkonsis-tenzen.)

Axiom (geordnetes Paar, *ordered pair*) 1-14:

$\langle x, y\rangle = \langle u, v\rangle$ gdw $x = u$ und $y = v$.

(Kommentar: manche definieren ein geordnetes Paar $\langle x, y\rangle$ als $\{\{x\}, \{x, y\}\}$. Man kann dann obige Eigenschaft beweisen.)

Definition (geordnetes n-tupel, *ordered n-tuple*) 1-15:

$\langle a_1, \ldots, a_n\rangle = \langle\langle a_1, \ldots, a_{n-1}\rangle, a_n\rangle$.

Definition (Relation, *relation*) 1-16:

R ist Relation gdw für alle x: wenn $x \in$ R, so gibt es ein y und ein z so dass gilt: $x = \langle y, z\rangle$.

(Mit andern Worten: eine Relation ist nichts anderes als eine Menge von geordneten Paaren.)

Definition (kartesisches Produkt, *Cartesian product*) 1-17:

$Y \times Z = \{x$: es gibt ein y und ein z so dass gilt: $x = \langle y, z\rangle$ und $y \in Y$ und $z \in Z\}$

(d.h. $Y \times Z$ ist die Menge aller geordneten Paare mit linkem Element in Y und rechtem Element in Z: Analoges gilt für das n-fache kartesische Produkt $X_1 \times \ldots \times X_n$. Wir schreiben für "$X \times X$" auch "$X^2$", für "$X \times X \times X$" auch "$X^3$", etc.)

Definition (Funktion, Abbildung; *function*) 1-18:

Eine Funktion ist eine Relation, bei der es für jedes linke Element genau ein rechtes Element gibt:

f ist eine Funktion gdw f ist eine Relation und für alle x, y, z gilt: wenn $\langle x,y\rangle \in$ f und $\langle x,z\rangle \in$ f, dann $y = z$.

Man kann sich folgendes Bild machen. Es gibt eine Menge, X, auf der die Funktion f definiert ist, nämlich die Menge der linken Elemente von f. Für jedes Element, x, in dieser Menge liefert f genau ein Ding, f(x), nämlich das eindeutig bestimmte rechte Element, das dem linken Element entspricht.

Dies läuft auf eine Definition von "f(x)" hinaus, wenn x ein linkes Element von f ist; in allen andern Fällen vermeide "f(x)", da es keinen Sinn ergibt.

Wir schreiben auch manchmal "fx" anstelle von "f(x)", und "fxy" oder "f(x,y)" anstelle von "f(<x,y>)".

Definition (defininiert an,auf; *defined on*) 1-19:

Eine Funktion f ist definiert am "Punkt" x wenn x ein linkes Element von f ist; f ist definiert auf einer Menge, X, wenn jedes Element von X ein linkes Element von f ist. X nennt man auch den *Definitionsbereich* von f. Gebrauche "f(x)" nur, wenn f an x definiert ist.

Definition (Funktionsraum, *function space*) 1-20:

Y^X ist die Menge aller Funktionen, die genau auf X definiert sind, und so dass gilt: für jedes $x \in X$, $f(x) \in Y$.

(Manchmal wird auch die Notation "X ---> Y" verwendet.)

Definition (N) 1-21:

N ist definiert als die Menge der nicht-negativen, ganzen Zahlen 0,1,2, ...

(Manchmal denken wir uns N auch mit 1 anfangend.)

Konvention 1-22:

Wir verwenden "i", "j","k", "l","m", "n" als Variable über N.

Definition (Folge, *sequence*) 1-23:

f ist eine abzählbare Folge von X´en gdw $f \in X^N$. D.h. eine abzählbare Folge ist eine Funktion, die genau auf N definiert ist.

f ist eine endliche Folge von X´en gdw $f \in X^{N'}$, für ein N´, das ein "Anfangssegment" von N ist.; z.B. {0, 1, 2, 3}. (Manchmal ist es besser, mit 1 anzufangen.)

f ist eine Folge von Xén, wenn f entweder eine abzählbare oder endliche Folge von Xén ist.

Definition (Subskripte, *subscripts*) 1-24:

Wenn x eine Folge ist, die auf N definiert ist, oder auf einem Anfangssegment von N, zu dem n gehört, dann setzen wir

$$x_n = x(n)$$

Nachtrag zu Relation und Funktion:

Inverse Relation (Umkehrrelation):

Sei R eine 2-stellige Relation von X nach Y, also $R \subseteq X \times Y$. Dann heisst R^{-1} die *inverse Relation von* R, wenn gilt
$R^{-1} = \{<y, x> : <x, y> \in R\}$. (Es gilt also: $R^{-1} \subseteq Y \times X$)

Eigenschaften von Funktionen:

Injektion: Eine Funktion f: $A \to B$ heisst *injektiv*, wenn aus $f(x_1) = f(x_2)$ folgt, dass $x_1 = x_2$, für alle $x_1, x_2 \in A$.

Surjektion: Eine Funktion f: $A \to B$ heisst *surjektiv*, wenn es zu jedem $y \in B$ mindestens ein $x \in A$ gibt, so dass $f(x) = y$. (Man spricht dann auch von einer Abbildung *auf* B.)

Bijektion: Eine Funktion f: $A \to B$ heisst *bijektiv*, wenn sie injektiv und surjektiv ist.

(Merke: Wenn f eine Bijektion ist, dann ist auch f^{-1}, d.h. die inverse Funktion von f, eine Funktion.)

Komposition von Funktionen ("Hintereinanderschalten von Funktionen"):

Aus zwei Funktionen, f: $A \to B$ und g: $B \to C$, kann man eine dritte Funktion gewinnen durch Komposition ($g \circ f$), die so definiert ist:

$g \circ f = \{<x,z> :$ es gibt ein y, so dass $<x, y> \in f$ und $<y, z> \in g\}$

(Es gilt also: $g \circ f(x) = g(f(x))$, für $x \in A$.)

Algebren und Gruppen

Algebra

Eine *Algebra* ist eine Struktur $<A, f_1, ..., f_n>$, wobei A eine Menge und die f_i m_i-stellige Operationen (möglicherweise unendlich viele) sind.

Bedingungen für die Operationen

1) *Abgeschlossenheit* bezüglich A.
D.h. $f_i : A \times ... \times A$ (m_i-mal)$\to A$.

2) *Eindeutigkeit* der f_i. D.h. wenn $a = a'$ und $b = b'$, dann $a \circ b = a' \circ b'$, z.B. für 2-stellige Operation $\circ$.

Subalgebra

$\mathfrak{B}$ ist *Subalgebra von* $\mathfrak{A}$, mit $\mathfrak{A} = <A, f_1^A, ..., f_n^A>$, gdw

$\mathfrak{B} = <B, f_1^B, ..., f_n^B>$ und

i) $B \subseteq A$,

ii) für jedes i, 1≤i≤n: $f_i^B = f_i^A \upharpoonright B$ (d.h. die Einschränkung von f_i^A auf B,

iii) $\mathfrak{B}$ ist abgeschlossen unter allen f_i^B

.

Eigenschaften von (2-stelligen) Operationen

1) Assoziativität: $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$

2) Kommutativität: $a \circ b = b \circ a$

3) Idempotenz: $a \circ a = a$

4) Distributivität einer Operation $\circ_1$ bezüglich $\circ_2$: $a \circ_1 (b \circ_2 c) = (a \circ_1 b) \circ_2 (a \circ_1 c)$

Besondere Elemente

Einselement:

1) linkes Einselement (Identitätselement, neutrales Element):

für alle $a \in A$, $e_l \circ a = a$

2) rechtes Einselement:
für alle $a \in A$, $a \circ e_r = a$

3) (beidseitiges) Einselement:
für alle $a \in A$, $a \circ e = e \circ a = a$

Inverse Elemente:

1) linkes inverses Element :
$a_l \circ a = e$

2) rechtes inverses Element:
$a \circ a_r = e$

3) (beidseitiges) inverses Element:
$a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$

(NB:
1) wenn $a \circ b = e$, dann ist a linksinverses Element für b und b rechtsinverses für a;
2) während das Einslement, falls vorhanden, für die Gesamtoperation gilt, sind inverse Elemente nur für einzelne Elemente definiert.)

Nullelemente:

1) linkes Nullelement:
für alle $a \in A$, $0_l \circ a = 0_l$

2) rechtes Nullelement:
für alle $a \in A$, $a \circ 0_r = 0_r$

3) (beidseitiges) Nullelement:
für alle $a \in A$, $a \circ 0 = 0 \circ a = 0$

Morphismen

Ein *Morphismus* ist eine Abbildung F einer Algebra $\mathfrak{A} = <A, f_1, ..., f_n>$ in eine andere Algebra $\mathfrak{B} = <B, g_1, ..., g_n>$, wobei wir annehmen, dass die Operation f_i der Operation g_i entspricht (d.h. dieselbe Stellenzahl hat).

Für einen *Homomorphismus* gilt:

i) F: $A \to B$ (F surjektiv),

ii) $F(f_i(x, y, z, ...)) = g_i(F(x), F(y), F(z), ...)$

(d.h. das Bild des Funktionswertes von Argumenten ist der Funktionswert der Bilder der Argumente)

Ist F auch noch injektiv (d.h. F ist bijektiv), dann spricht man von einem *Isomorphismus*. (Bei einem Isomorphismus haben A und B also dieselbe Anzahl von Elementen, wohingegen bei einem Homomorphismus B möglicherweise kleiner ist als A.)

Gruppen

$\mathfrak{G} = \langle G, \circ \rangle$ ist eine *Gruppe* gdw

1) $\mathfrak{G}$ ist eine Algebra,

2) $\circ$ ist assoziativ,

3) es gibt ein Einselement in G,

4) jedes Element von G hat ein inverses Element.

Wenn $\circ$ in $\mathfrak{G} = \langle G, \circ \rangle$ auch kommutativ ist, dann heisst $\mathfrak{G}$ *abelsche* Gruppe.

Einige Eigenschaften von Gruppen:

1) Gleichungen $x \circ a = b$ und $a \circ y = b$ haben eindeutige Lösungen,

2) jedes $a \in G$,hat genau ein inverses Element.

(Dass das Einselement eindeutig bestimmt ist, kann man schon aus seiner Existenz beweisen.)

Untergruppen

$\mathfrak{G}'$ ist *Untergruppe* von $\mathfrak{G} = \langle G, \circ \rangle$ gdw

1) $\mathfrak{G}'$ ist Subalgebra von $\mathfrak{G}$,

2) $\mathfrak{G}'$ ist eine Gruppe.

Halbgruppen

$\mathfrak{H} = \langle H, \circ \rangle$ ist eine *Halbgruppe* gdw

1) $\mathfrak{H}$ ist eine Algebra,

2) $\circ$ ist assoziativ.

Monoide

$\mathfrak{M} = \langle M, \circ \rangle$ ist ein *Monoid* gdw

1) $\mathfrak{M}$ ist eine Algebra,

2) $\circ$ ist assoziativ,

3) es gibt ein Einselement in M.

Ordnungen und Verbände

Halbordnung, partielle Ordnung (poset)

Eine Menge, A, auf der eine Relation $\leq$ erklärt ist, d.h. $\langle A, \leq \rangle$, nennt man eine *Halbordnung* oder *partielle Ordnung*, wenn $\leq$ reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist.

Reflexivität, Antisymmetrie und Transitivität sind Eigenschaften von zweistelligen Relationen.

Sei A eine Menge und R eine zweistellige Relation über A (d.h. $R \subseteq A \times A$).

Reflexivität:
für alle $a \in A$.: aRa,

Antisymmetrie:
für alle $a, b \in A$.: wenn aRb und bRa, dann $a=b$,

Transitivität:
für alle $a, b, c \in A$.: wenn aRb und bRc, dann aRc.

Gilt für alle $a,b \in A$, $a \leq b$ oder $b \leq a$, dann nennt man $\langle A, \leq \rangle$ auch *Kette* oder *lineare Ordnung*.

Gilt $a \leq b$ oder $b \leq a$, dann nennt man a und b *vergleichbar*, andernfalls *unvergleichbar* ($a \mid\mid b$).

Sei $\langle A, \leq \rangle$ eine Halbordung, $B \subseteq A$ und $a \in A$.

Dann ist a eine *obere Schranke* (upper bound) von B gdw für alle $b \in B$: $b \leq a$, und a ist *obere Grenze* (*Supremum*, least upper bound) von B gdw für alle oberen Schranken c: $a \leq c$. Wir verwenden die Notation: $a = \sup B$ für "a ist Supremum von B".

Analog oder *dual* dazu definiert man:

Dann ist a eine *untere Schranke* (lower bound) von B gdw für alle $b \in B$: $b \geq a$, und a ist *untere Grenze* (*Infimum*, greatest lower bound) von B gdw für alle unteren Schranken c: $a \geq c$. Wir verwenden die Notation: $a = \inf B$ für "a ist Infimum von B".

Die zu $\leq$ inverse Relation $\geq$ über A , d.h. $\langle A, \geq \rangle$, ist ebenso eine Halbordnung und ist *dual* zu $\langle A, \leq \rangle$.

Verband

Verband als Ordnung

Eine Halbordung, $\langle A, \leq \rangle$, ist ein *Verband* gdw für alle $a, b \in A$ gibt es ein $y \in A$, $y = \sup\{a,b\}$ und ein $x \in A$, $x = \inf\{a,b\}$.

Verband als Algebra

Eine Algebra, $\langle A, \wedge, \vee \rangle$, für deren zwei 2-stellige Operationen, $\wedge$ (meet) und $\vee$ (join), folgende vier Axiome gelten, ist ein Verband.

(V1) $a \wedge a = a$, $a \vee a = a$
(Idempotenz)

(V2) $a \wedge b = b \wedge a$, $a \vee b = b \vee a$
(Kommutativität)

(V3) $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$,
$(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$ (Assoziativität)

(V4) $a \wedge (a \vee b) = a$, $a \vee (a \wedge b) = a$
(Absorption)

Kommentar:

Man hat also zwei ganz verschiedene Zugangsweisen zu Verbänden, eine ordungstheoretische und eine algebraische. Man kann nun zeigen, dass hiermit nicht "zwei verschiedene Arten" von Verbänden charakterisiert werden, sondern dass diese verschiedenen Definitionen dasgleiche leisten, d.h. die gleichen Strukturen als Verbände auszeichnen. Dazu stellt man folgende Beziehungen her.

i) Sei $\langle A, \leq \rangle$ eine Halbordung, die ein Verband ist; dann definieren wir $a \wedge b =_{df} \inf\{a, b\}$ und $a \vee b =_{df} \sup\{a, b\}$. Dann ist die Algebra $\langle A, \wedge, \vee \rangle$ ein Verband.

ii) Sei die Algebra $\langle A, \wedge, \vee \rangle$ ein Verband; dann definieren wir $a \leq b =_{df} a \wedge b = a$. Dann ist die Halbordnung $\langle A, \leq \rangle$ ein Verband.

Unterverband

Sei $\mathcal{A} = \langle A, \wedge, \vee \rangle$ ein Verband. Dann ist $\mathfrak{B} = \langle B, \wedge', \vee' \rangle$ ein *Unterverband von* $\mathcal{A}$ gdw $B \subseteq A$, mit B nichtleer, $\mathfrak{B} = \langle B, \wedge', \vee' \rangle$ ist eine Algebra, und $\wedge', \vee'$ sind die Einschränkungen von $\wedge, \vee$ auf B. (Beachte, dass nicht jede Unteralgebra $\mathcal{A}$, die ein Verband ist, auch ein Unterverband von $\mathcal{A}$ ist.)

Halbverband

(als Halbordnung)

Eine Halbordung, $\langle A, \leq \rangle$, ist ein $\wedge$-*Halbverband* (engl. *meet-semilattice*) gdw für alle $a,b \in A$ gibt es ein $x \in A$, $x = \inf\{a,b\}$.

Eine Halbordung, $\langle A, \leq \rangle$, ist ein $\vee$-*Halbverband* (engl. *join-semilattice*) gdw für alle $a,b \in A$ gibt es ein $x \in A$, $x = \sup\{a,b\}$.

(als Algebra)

Eine Algebra, $\langle A, \circ \rangle$ ist ein *Halbverband* gdw $\circ$ ist assoziativ, idempotent und kommutativ.

Ähnlich wie bei den Verbänden ist die algebraische mit der ordnungstheoretischen Charakterisierung von Halbverbänden äquivalent. Die Beziehung zwischen den beiden Charakterisierungen wird durch folgende Definitionen hergestellt:

Sei $\langle A, \leq \rangle$ ein $\vee$-Halbverband ($\wedge$-Halbverband) und sei $a \vee b =_{df} \sup\{a, b\}$ ($a \wedge b =_{df} \inf\{a, b\}$). Dann ist $\langle A, \vee \rangle$ ($\langle A, \wedge \rangle$) ein Halbverband.

Sei $\langle A, \circ \rangle$ ist ein Halbverband und sei $a \leq b =_{df} a \circ b = b$ ($a \leq b =_{df} a \circ b = a$). Dann ist $\langle A, \leq \rangle$ ein $\vee$-Halbverband ($\wedge$-Halbverband).

Aussagenlogik

Formalisieren in der Aussagenlogik

Wörterbuch:

P :	Paul besteht (die Prüfung).	Q :	Kurt besteht.
R :	Rolf besteht.	S :	Paul studiert fleissig.
M :	Paul ist müde.		

(NB: äussere Klammern wurden weggelassen!)

Rolf besteht nicht.	$\sim R$	Kurt wird nicht durchfallen.	$\sim\sim Q$
Kurt und Paul bestehen beide.	$Q \mathbin{\&} P$	Kurt besteht, aber Paul nicht.	$Q \mathbin{\&} \sim P$
Paul besteht, ausser wenn er müde ist.	$\sim M \supset P$	Weder Paul noch Kurt bestehen.	$\sim(P \vee Q)$
Paul besteht nur, wenn er nicht müde ist.	$P \supset \sim M$	Paul und Kurt bestehen nicht beide.	$\sim(P \mathbin{\&} Q)$

Paul besteht dann, und nur dann, wenn er fleissig studiert hat und nicht müde ist. $P \equiv (S \mathbin{\&} \sim M)$

Paul besteht, falls Kurt es tut; anderfalls besteht keiner von ihnen. $(Q \supset P) \mathbin{\&} (\sim Q \supset (\sim P \mathbin{\&} \sim Q))$

Mindestens zwei (von den dreien) bestehen. $(P \mathbin{\&} Q) \vee [(P \mathbin{\&} R) \vee (Q \mathbin{\&} R)]$

Formalisierungshilfe für die aussagenlogischen Konnektive

Name der Verknüpfung	Negation	Konjunktion	Disjunktion	Konditional	Bikonditional
Formalisierung	***~A***	**(*A* & *B*)**	**(*A* v *B*)**	**(*A* ⊃ *B*)**	**(*A* ≡ *B*)**
Name der Komponenten	***A*** ist der negierte Satz (Formel)	***A*** ist linkes Konjunkt ***B*** ist rechtes Konjunkt	***A*** ist linkes Disjunkt ***B*** ist rechtes Disjunkt	***A*** ist das Antezedenz ***B*** ist das Konsequent	***A*** ist die linke Seite ***B*** ist die rechte Seite
Standardformulierung im Deutschen	***Es ist nicht der Fall, dass A***	***A und B***	***A oder B***	***Wenn A, dann B***	***A genau dann, wenn B***
einige stilistische Varianten	Es ist falsch, dass *A* Nicht *A* Keineswegs *A*	Sowohl *A* als auch *B* *A* und auch *B* *A*, aber *B* *A*, obwohl *B* *A*, dennoch *B* *A*, und weiterhin *B* *A*, und zusätzlich *B* . . .	Entweder *A* oder B *A*, andernfalls *B* *A*, oder auch *B* . . .	Wenn *A*, *B* Falls *A*, (dann) *B* *B*, wenn *A* *B*, falls *A* *B*, vorausgesetzt *A* *A* nur, wenn *B* *A* ist hinreichende Bedingung für *B* *B* ist notwendige Bedingung für *A* *B* ist sine qua non für *A*	*A* gdw *B* *A* dann, und nur dann, wenn *B* *A* ist äquivalent mit *B* *A* ist notwendige und hinreichende Bedingung für *B* . . .

Formale Syntax der Aussagenlogik AL

Die *Syntax* (i.e.S.) oder *Grammatik* einer Logik hat die Aufgabe, die Menge der grammatisch wohlgeformten Ausdrücke der verschiedenen syntaktischen Kategorien zu bestimmen.

In der Aussagenlogik kommen wir mit einer syntaktischen Kategorie aus, nämlich der der *Aussage* oder *Formel* der AL. Die andern Zeichen, die in solchen Formeln vorkommen können, wie z.B. Satzkonnektive und Klammern, werden also als *synkategorematisch* eingeführt betrachtet. D. h. man betrachtet letztere nicht als Zeichen einer eigenen Kategorie, die eine selbständige Bedeutung haben, sondern nur als im Kontext (von Aussagen) bedeutungsvoll.

Die Grammatik einer Sprache spezifiziert man durch die Angabe

1) ihres *Vokabulars,* d.h. der zulässigen Zeichen (kategorematische sowie auch synkategorematische) und

2) der *grammatischen Regeln* (Formationsregeln), die die einzelnen Kategorien von Ausdrücken definieren.

Vokabular:

1) Eine Menge von *Satzparametern SP* (auch *Aussagenvariablen* genannt): P_0, P_1, ...

   (<u>Konvention:</u> wir lassen in der Praxis aus mnemotechnischen Gründen alle Grossbuchstaben des lateinischen Alphabets - mit und ohne Subskripte - zu; also A, B, C, ..., Z, A_1, B_1, ...)

2) Satzkonnektive: ~, &, ∨, ⊃, ≡

3) Gruppierungszeichen: (,)

   (<u>Konvention:</u> wir lassen auch Klammern anderer Art zu, um die Lesbarkeit zu erleichtern; also auch [,] und {, }.)

Formationsregeln:

1) Jeder Satzparameter der AL ist eine Formel der AL (*atomare* Formel).

2) Wenn *A* eine Formel der AL ist, dann ist auch *~A* eine Formel (*Negation*).

3) Wenn *A* und *B* Formeln sind, dann ist auch (*A* & *B*) eine Formel (*Konjunktion*).

4) Wenn *A* und *B* Formeln sind, dann ist auch (*A* v *B*) eine Formel (*Disjunktion*).

5) Wenn *A* und *B* Formeln sind, dann ist auch ($A \supset B$) eine Formel (*Konditional*).

6) Wenn *A* und *B* Formeln sind, dann ist auch ($A \equiv B$) eine Formel (*Bikonditional*).

7) Nur die nach Regeln 1. - 6. gebildeten Ausdrücke sind Formeln der AL.

Die nach Regeln 2.- 6. gebildeten Formeln sind *komplexe* Formeln, deren Teile wir ihre *Komponenten* nennen. So hat z.B. ein Konditional, ($A \supset B$), die Komponenten *A* (*Antezedent*) und *B* (*Konsequent*). Das Hufeisen ist in dieser Formel das *Hauptkonnektiv*.

<u>Schreibkonvention</u>

Wir verwenden ´*A*´, ´*B*´, ´*C*´, ... als Metavariable für Formeln der AL allgemein, während ´*P*´, ´*Q*´, ´*R*´, ... als Metavariable für atomare Formeln, also Satzparameter, verwendet werden. ´Γ´, ´Δ´, ... werden als Metavariable für Mengen von Formeln verwendet.

Leider ist die Notation in der Logik nicht standardisiert. Es sollte jedoch keine grossen Schwierigkeiten bereiten, zwischen den verschiedenen notationellen Varianten hin- und herzuwechseln.

<u>Notationelle Varianten für die Konnektive:</u>

für die Negation: $\neg A$, $\bar{A}$

für die Konjunktion: $(A \wedge B)$, $(A \cdot B)$

für den Konditional: $(A \Rightarrow B)$, $(A \rightarrow B)$

für den Bikonditional: $(A \Leftrightarrow B)$, $(A \leftrightarrow B)$

Formale Semantik der Aussagenlogik AL

Wir setzen die Syntax von AL voraus, wie sie z.B. im letzten Handout definiert worden ist. Sei *SP* die (abzählbar unendliche) Menge der Satzparameter ("Aussagenvariablen") der Sprache.

Die Menge der Wahrheitswerte ist $\{W, F\}$. (Manchmal wird auch $\{0,1\} = 2$ als die Menge der Wahrheitswerte verwendet.)

Eine Belegung V ist eine Funktion von *SP* in $\{W, F\}$ (d.h. $V \in \{W, F\}^{SP}$). Eine Belegung V weist also jedem Satzparameter genau einen der beiden Wahrheitswerte W oder F zu.

Semantische Regeln der AL

1. Der Wahrheitswert von atomaren Formeln ist durch die Belegung V festgelegt.
2. Sei $A = \sim B$ (d.h. A sei eine Negation, wobei B die negierte Formel ist). Dann ist $V(A) = W$ wenn $V(B) = F$.

   Sonst ist $V(A) = F$.
3. Sei $A = (B \,\&\, C)$. Dann ist $V(A) = W$ wenn $V(B) = W$ und $V(C) = W$. Sonst ist $V(A) = F$.
4. Sei $A = (B \vee C)$. Dann ist $V(A) = W$ wenn entweder $V(B) = W$ oder $V(C) = W$. Sonst ist $V(A) = F$.
5. Sei $A = (B \supset C)$. Dann ist $V(A) = W$ wenn entweder $V(B) = F$ oder $V(C) = W$. Sonst ist $V(A) = F$.
6. Sei $A = (B \equiv C)$. Dann ist $V(A) = W$ wenn $V(B) = V(C)$. Sonst ist $V(A) = F$.

Definition einiger semantischer Begriffe

Def.1: Eine Belegung V *AL-erfüllt* eine Formel der AL, A, gdw $V(A) = W$. (V *satisfies* A)

Def.2: Eine Formel, A, ist *AL-erfüllbar* gdw es gibt eine Belegung V, die A AL-erfüllt. (*satisfiable*)

Def.3: Eine Formel der AL, A, ist *AL-wahr* (AL-gültig, tautologisch) gdw $V(A) = W$, für jede Belegung V. (*truth-functionally true*, *valid*) (Jede Belegung V AL-erfüllt A.)

Def.4: Eine Formel der AL, A, ist *AL- falsch* (AL-kontradiktorisch) gdw $V(A) = F$, für jede Belegung V. (*truth-functionally false*) (Keine Belegung V erfüllt A.)

Def.5: Eine Formel der AL, A, ist *AL-nichtdeterminiert* (AL-kontingent) gdw es gibt eine Belegung V so dass gilt $V(A) = W$ und es gibt eine Belegung V' so dass gilt $V'(A) = F$. (*t.-f. indeterminate*)

Def.6: Zwei Formeln der AL, A und B, sind *AL-äquivalent* gdw $V(A) = V(B)$, für jede Belegung V.

Def.7: Eine Belegung V AL-*erfüllt* eine Menge von Formeln der AL, Γ, gdw für alle $B \in \Gamma$, $V(B) = W$. (D.h. eine Belegung erfüllt eine Menge von Formeln gdw sie jedes Element der Menge erfüllt.)

Def.8: Eine Menge von Formeln der AL, Γ, ist *AL-(simultan)erfüllbar* (AL-konsistent) gdw es gibt eine Belegung V so dass gilt V *AL-erfüllt* Γ (d.h $V'(A) = W$, für jede Formel $A \in \Gamma$). (Γ *is simultaneously satisfiable*) (Eine Menge von Formeln, Γ, heisst AL-nicht-erfüllbar (AL-inkonsistent) gdw Γ nicht AL-erfüllbar ist.

Def.9: Eine Menge von Formeln der AL, Γ, *AL-impliziert* eine Formel der AL, A (A folgt aussagenlogisch aus Γ, Γ *entails* A, $\Gamma \mid= A$) gdw für jede Belegung V die Γ AL-erfüllt gilt: $V(A) = W$. (D.h. es gibt keine Belegung V, die jede Formel in Γ wahr macht (erfüllt), jedoch A falsch macht (nicht erfüllt).)

Def.10: Ein Argument der AL, $A_1, ..., A_n \therefore B$, ist *AL-gültig* gdw $\{A_1, ..., A_n\} \mid= B$. (D.h. ein Argument ist logisch gültig gdw die Prämissen die Konklusion logisch implizieren, wenn es also nicht sein kann, dass die Prämissen wahr sind, während die Konklusion falsch ist.) Ein Argument, das nicht gültig ist, heisst *AL-ungültig*.

Kurze Wahrheitstafelmethode

Die *Kurze Wahrheitstafelmethode* basiert auf der ("langen") Wahrheitstafelmethode. Die Grundidee ist die, dass man nicht alle möglichen Teilbelegungen für eine Aussage oder Menge von Aussagen bewertet (d.h. eine Wahrheitstafel für die Aussage oder Menge von Aussagen konstruiert), sondern zielgerichtet eine oder mehrere Belegungen, die ein bestimmtes Ergebnis haben, *rekonstruiert*. Man spart sich dabei das (relativ stumpfsinnige) Bewerten vieler irrelevanter Belegungen. Obwohl diese Rekonstruktion einer relevanten Belegung nicht immer beim ersten Versuch klappt, spart man im Allgemeinen dennoch sehr viel Arbeit. Die Kurze Methode ist die Methode, mit der der Logiker *praktisch* arbeitet. Jeder sollte sie gut beherrschen.

Ich werde die Methode kurz am Beispiel *Argument* vorstellen. Hier ist nochmals die Definition.

Def.7: Ein Argument der AL, $A_1, ..., A_n \therefore B$, ist *AL-gültig* gdw $\{A_1, ..., A_n\} \mid= B$. (D.h. ein Argument ist logisch gültig gdw die Prämissen die Konklusion logisch implizieren, wenn es also nicht sein kann, dass die Prämissen wahr sind, während die Konklusion falsch ist.) Ein Argument, das nicht gültig ist, heisst *AL-ungültig*.

Eine Belegung V, die die Prämissen erfüllt (wahr macht) und die Konklusion falsch macht heisst ein *Gegenbeispiel*. Die Existenz eines solchen Gegenbeispiels zeigt also, dass das Argument ungültig ist.

Wenn es kein Gegenbeispiel gibt, dann ist das Argument gültig.

P_1	P_2	…	P_m	A_1	A_2	…	A_n	B
?	?		?	W	W	…	W	F

"Gegenbeispiel"

Wenn man also die Gültigkeit oder Ungültigkeit eines Argumentes bestimmen will, dann versucht man ein Gegenbeispiel zu rekonstruieren, d.h. die Fragezeichen oben durch Wahrheitswerte so zu ersetzen, dass die entsprechenden Werte unter den A_i ($1 \le i \le n$) und B resultieren. Gelingt dies, dann hat man ein Gegenbeispiel rekonstruiert, somit gibt es eins, und damit ist die Ungültigkeit des Arguments gezeigt. Gelingt es jedoch nicht (obwohl man *alles* versucht hat), dann gibt es kein Gegenbeispiel, und somit ist die Gültigkeit des Arguments gezeigt.

Diese Methode ist *indirekt* in dem Sinne, dass man, um die Gültigkeit eines Arguments zu zeigen, annimmt, es sei ungültig, also ein Gegenbeispiel zu rekonstruieren versucht, und dann zeigt, dass dies unmöglich ist (also in einem Widerspruch endet, falls das Argument gültig ist).

Anwendung der Kurzen Methode auf die restlichen AL-Begriffe

1) A ist AL-wahr: (indirekt) Zeige, dass es kein Gegenbeispiel gibt. Gegenbeispiel: ein V mit $V(A) = F$.

2) A ist AL-falsch: (indirekt) Zeige, dass es kein Gegenbeispiel gibt. Gegenbeispiel: ein V mit $V(A) = W$.

3) A ist AL-kontingent: (direkt) Zeige - durch Konstruktion -, dass es ein "Beispiel" für die Wahrheit und ein "Beispiel" für die Falschheit von A gibt: ein V mit $V(A) = W$ und ein V' mit $V'(A) = F$. (Man muss also in diesem Fall zwei Belegungen ("Beispiele") rekonstruieren.)

4) A und B sind AL-äquivalent: (indirekt) Zeige, dass es kein Gegenbeispiel gibt. Gegenbeispiel: ein V mit $V(A) \neq V(B)$.

   (Vorsicht! Es gibt hier zwei Fälle:

   1) $V(A) = W$ und $V(B) = F$ und
   2) $V(A) = F$ und $V(B) = W$.)

5) Γ ist AL-erfüllbar: (direkt) Konstruiere eine Belegung, die Γ erfüllt (d.h. jede Formel in Γ wahr macht).

6) $\Gamma \mid= A$: (indirekt) : Zeige, dass es kein Gegenbeispiel gibt. Gegenbeispiel wie bei Gültigkeit von Argumenten (siehe oben).

Ein System des Natürlichen Schliessens

Das System S_{AL}, ein Natürliches-Schliessen System für die Aussagenlogik, besteht aus insgesamt 12 Regeln.

Davon sind 10 sogenannte *Intelim*-Regeln (d.h. Introduktions- und Eliminationsregeln für Formeln mit bestimmten Konnektiven als Hauptkonnektiv) plus zusätzlich 2 Regeln, die nicht mit Konnektiven zu tun haben:

a) die Regeln der Hypotheseneinführung (kurz Hyp), und

b) der Reiteration (kurz R).

(Beachte: in Leblanc & Wisdom findet sich keine Regel Hyp; aus systematischen Gründen ist es jedoch von Vorteil eine solche Regel zu haben. Dann kann jeder Zeile in einer Derivation eine Begründung zugewiesen werden.)

Einige Begriffe

Wir führen zunächst einige Begriffe ein.

Derivation

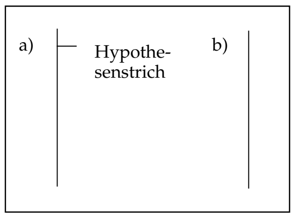
Die Objekte, die in S_{AL} konstruiert werden, heissen *Derivationen*. Eine Derivation besteht aus einer *Derivationslinie* mit einer endlichen Anzahl von *Gegenständen* (engl. *items*) unmittelbar rechts von der Derivationslinie.

Derivationslinie

Es gibt zwei Arten von Derivationslinien:

a) mit Hypothesenstrich

b) ohne Hypothesenstrich.



(Der Hypothesenstrich dient dazu, die durch Hyp eingeführten Aussagen von den durch andere Regeln gewonnenen Aussagen optisch abzugrenzen.)

Gegenstände einer Derivation

Es gibt weiterhin zwei Arten von Gegenständen (*items*) einer Derivation:

a) Formeln

b) Derivationen

(wobei Derivationen, die selbst wieder Gegenstände einer ("grösseren") Derivation sind, unmittelbare *Subderivationen* genannt werden. (Eine Derivation kann also eine Struktur von ineinandergeschachtelten Derivationen und Formeln sein.)

Subderivation

Auf solch einer Struktur kann eine Beziehung $\mathcal{D}$ ist Subderivation von $\mathcal{D}'$ rekursiv wie folgt definiert werden:

1) Jede Derivation $\mathcal{D}$ ist Subderivation von sich selbst ($\mathcal{D}$ sub $\mathcal{D}$).

2) Wenn $\mathcal{D}$ Subderivation von $\mathcal{D}'$ ist und $\mathcal{D}'$ ist ein Gegenstand von $\mathcal{D}''$, dann ist $\mathcal{D}$ auch Subderivation von $\mathcal{D}''$.

3) Sonst steht nichts in der Beziehung der Subderivation.

Ein einfacher Test zur Feststellung, ob zwischen zwei Derivationen die Relation der Subderivation besteht, geht wie folgt.

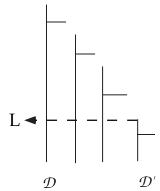
Frage: Ist $\mathcal{D}'$ Subderivation von $\mathcal{D}$ (d.h. $\mathcal{D}'$ sub $\mathcal{D}$)?

Methode:

1) Ziehe vom oberen Ende der Derivationslinie von $\mathcal{D}'$ eine horizontale Linie L nach links ins "Unendliche".

2) Stelle fest, ob L die Derivationslinie von $\mathcal{D}$ schneidet.

3) Wenn ja, denn ist $\mathcal{D}'$ sub $\mathcal{D}$; wenn nein, dann gilt nicht-($\mathcal{D}'$ sub $\mathcal{D}$).

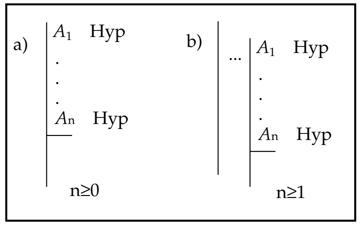


Die Regeln von S_{AL}

Die Regel der Hypotheseneinführung (Hyp):

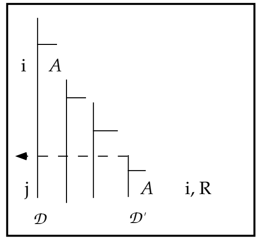
a) Um eine Derivation zu beginnen, kann man n ≥ 0 Hypothesen einführen, indem man eine Derivationslinie eröffnet und die n Formeln untereinander und unmittelbar rechts von der Derivationslinie und oberhalb des Hypothesenstrichs schreibt. Wenn n = 0, dann ist eine Derivationslinie ohne Hypothesenstrich zu verwenden.

b) In einer schon angefangenen Derivation kann man jederzeit n ≥ 1 Hypothesen einführen, indem man eine neue Derivationslinie eröffnet und die n Formeln untereinander und unmittelbar rechts von der Derivationslinie und oberhalb des Hypothesenstrichs schreibt.



Die Regel der Reiteration (R):

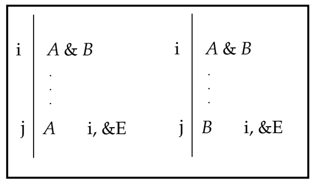
Man kann eine in einer Derivation $\mathcal{D}$ schon gewonnene Formel A zu einem späteren Zeitpunkt in einer Subderivation $\mathcal{D}'$ von $\mathcal{D}$ wiederholen.



Die Regeln für die Konjunktion

&Eliminierung (&E):

Wenn man in einer Derivation $\mathcal{D}$ eine Konjunktion A & B hat, dann kann man zu einem späteren Zeitpunkt (in einer Subderivation $\mathcal{D}'$ von $\mathcal{D}$) eines der beiden Konjunkte, A oder B, hinschreiben.



&Introduktion (&I):

Wenn man in einer Derivation $\mathcal{D}$ eine Formel A und in einer Derivation $\mathcal{D}'$ eine Formel B hat, so kann man zu einem späteren Zeitpunkt die Konjunktion von A und B, $A \& B$, in einer Derivation $\mathcal{D}''$ hinschreiben, die sowohl zu $\mathcal{D}$ als auch zu $\mathcal{D}'$ subordiniert ist.

i	A		i	B	
	⋮			⋮	
j	B		j	A	
	⋮			⋮	
k	$A \& B$	i, j, &I	k	$A \& B$	i, j, &I

Allgemeiner Kommentar zu den Regeln:

a) Man unterscheidet bei einer Regel zwischen *Prämissen* und *Konklusion*. Jede Regel, ausser die Hypotheseneinführung, hat mindestens eine Prämisse und genau eine Konklusion, wobei die Konklusion immer eine Formel der AL sein muss. (So sind z.B. Reiteration und &Eliminierung 1-Prämissen-Regeln, während &Introduktion eine 2-Prämissen-Regel ist.)

b) Die Reihenfolge der Prämissen (bei mehr-Prämissen-Regeln) ist irrelevant; sie können auch auf mehrere Derivationen verteilt sein.

c) Die Konklusion kommt immer nach den Prämissen (d.h. sie steht auf einer späteren Zeile als alle Prämissen-Zeilen) und sie kann nur in einer Derivation stehen, die zu allen Derivationen, in denen eine Prämisse vorkommt, subordiniert ist.

Sei eine *Prämissenderivation* eine Derivation, in der eine Prämisse einer Regel steht, und die *Konklusionsderivation* die Derivation, in der die Konklusion der Regel steht.

Dann bedeutet die in c) formulierte Beschränkung:

Eine Anwendung einer Regel ist nur korrekt, wenn die Konklusionsderivation zu allen Prämissen-derivationen subordiniert ist.

Um die graphische Darstellung der Regeln nicht unnötig kompliziert zu machen, stehen Prämissen und Konklusion ab den Regeln für & alle in einer Derivation. Es sollte jedoch klar sein, dass dies eine Vereinfachung ist.

Regeln für den Konditional

Die Eliminierungsregel für den Konditional ist unser altbekannter Modus Ponens, während die Introduktionsregel dem Konditionalen Beweis entspricht:

$\supset$Eliminierung ($\supset$E):

Wenn man in einer Derivation einen Konditional, $A \supset B$, hat und dessen Antezedens, A, dann kann man zu einem späteren Zeitpunkt das Konsequens des Konditionals, B, hinschreiben.

i	$A \supset B$	
	⋮	
j	A	
	⋮	
k	B	i, j, $\supset$E

$\supset$Introduktion ($\supset$I):

Wenn man in einer Derivation eine (Sub-)Derivation hat, deren einzige Hypothese A und deren letzte Zeile B ist, dann kann man zu einem späteren Zeitpunkt den Konditional $A \supset B$ hinschreiben.

i	| A	Hyp
	| ⋮	
j	| B	
k	$A \supset B$	i-j, $\supset$I

Beachte die Notation "i-j" in der Rechtfertigung von $\supset$I, anstelle von "i, j": die Bindestrich-Notation soll anzeigen, dass es sich bei der Prämisse um eine Derivation handelt, die sich von Zeile i bis zur Zeile j erstreckt. (Dies ist also eine 1-Prämissen-Regel!)

Regeln für die Negation

Die Eliminierungsregel für die Negation ist die "Doppelte Negation", während die Introduktions-regel unser altbekannter Indirekter Beweis (Reductio ad absurdum) ist.

~Eliminierung (~E):

Wenn man in einer Derivation eine doppelte Negation - also eine Formel der Form $\sim\sim A$ - hat, so kann man zu einem späteren Zeitpunkt die Formel A hinschreiben.

i	$\sim\sim A$	
	⋮	
j	A	i, ~E

~Introduktion (~I):

Wenn man in einer Derivation $\mathcal{D}$ eine (Sub-)Derivation hat, deren einzige Hypothese A und die zwei Zeilen B und $\sim B$ enthält, dann kann man zu einem späteren Zeitpunkt in $\mathcal{D}$ (oder einer Subderivation von $\mathcal{D}$) die Formel $\sim A$ hinschreiben.

i	| A	Hyp
	| ⋮	
	| B	
	| ⋮	
j	| $\sim B$	
k	$\sim A$	i-j, ~I

Regeln für die Disjunktion

Die Eliminierungsregel für die Disjunktion ist die altbekannte Fallunterscheidung oder das Dilemma. Die Introduktionsregel heisst auch oft Addition.

$\vee$Eliminierung ($\vee$E):

Wenn man in einer Derivation eine Disjunktion $A \vee B$ hat und zwei (Sub-)Derivationen, deren eine als einzige Hypothese A und als letzte Zeile C hat und deren andere als einzige Hypothese B und als letzte Zeile C hat, so kann man zu einem späteren Zeitpunkt die Formel C hinschreiben.

i	$A \vee B$	
j	| A	Hyp
	| ⋮	
k	| C	
l	| B	Hyp
	| ⋮	
m	| C	
n	C	i, j-k, l-m, $\vee$E

$\vee$Introduktion ($\vee$I):

Wenn man in einer Derivation eine Formel A hat, so kann man zu einem späteren Zeitpunkt die Formel $A \vee B$ oder auch $B \vee A$ hinschreiben.

i	A		i	A	
	⋮			⋮	
j	$A \vee B$	i, $\vee$I	j	$B \vee A$	i, $\vee$I

Regeln für den Bikonditional

Die Eliminierungsregel ist - wie man erwarten würde - ein "bidirektionaler" Modus Ponens; und die Introduktionsregel ist entsprechend eine zweifache ⊃Introduktion.

≡Eliminierung (≡E):

Wenn man in einer Derivation einen Bikonditional $A \equiv B$ hat und zusätzlich eine seiner Seiten, also A bzw. B, so kann man zu einem späteren Zeitpunkt die jeweils andere Seite des Bikonditionals, also B bzw. A, hinschreiben.

i	$A \equiv B$		i	$A \equiv B$	
	.			.	
j	A		j	B	
	.			.	
k	B	i, j, ≡E	k	A	i, j, ≡E

≡Introduktion (≡I):

Wenn man in einer Derivation zwei (Sub-)Derivationen hat, deren eine als einzige Hypothese A und als letzte Zeile B hat und deren andere als einzige Hypothese B und als letzte Zeile A hat, so kann man zu einem späteren Zeitpunkt den Bikonditional $A \equiv B$ hinschreiben.

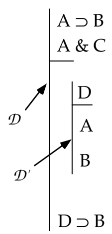
i	A	Hyp
	.	
j	B	
k	B	Hyp
	.	
l	A	
m	$A \equiv B$	i-j, k-l, ≡I

Beweistheoretische Begriffe von S_{AL}

Im Folgenden einige Begriffe der Beweistheorie von S_{AL}. Obwohl, wie man schnell sieht, eine enge Beziehung zu bestimmten semantischen Begriffen besteht (so z.B. zwischen Ableitbarkeit und logischer Folgerung), müssen die zwei "Begriffsarten" streng unterschieden werden: Beweistheoretische Begriffe sind *syntaktische* Begriffe, d.h. beziehen sich nur auf die Struktur der Ausdrücke, und haben von ihrer Bedeutung (Definition) her mit den semantischen Begriffen nichts zu tun. Die oben angedeutete Korrespondenz zwischen beweistheoretischen (syntaktischen) und semantischen Begriffen ist nicht trivial und erfordert einen relativ komplizierten Beweis (Korrektheit und Vollständigkeit von S_{AL}).

Wir gehen vom Begriff der Derivation in S_{AL} aus, wie er oben definiert wurde. Die *Hypothesen einer Derivation* sind nur diejenigen Formeln, die Gegenstände der Derivation sind und oberhalb des Hypothesenstrichs der zugehörigen Derivationslinie stehen. (Also insbesondere nicht die Hypothesen von Subderivationen der Derivation.)

Im folgenden Beispiel sind A ⊃ B und A & C die einzigen Hypothesen der Derivation $\mathcal{D}$, und D ist die einzige Hypothese der Derivation $\mathcal{D}'$.



<u>Def.1:</u> Eine *Ableitung in* S_{AL} ist eine Derivation, in der jede Zeile durch eine der Regeln von S_{AL} gewonnen wurde. (Engl. *deduction*)

<u>Def.2:</u> Eine *Ableitung in* S_{AL} *von A aus* Γ ist eine Ableitung in S_{AL}, deren Hypothesen alle in Γ sindund deren letzter Gegenstand (item) A ist.

Im obigen Beispiel ist $\mathcal{D}$ eine Ableitung von D ⊃ B aus {A ⊃ B, A & C}. Subderivationen sind Ableitungen nicht nur aus ihrer eigenen Hypothesenmenge, sondern aus der Vereinigungsmenge der eigenen Hypothesen mit allen Hypothesen *superordinierter* Derivationen. $\mathcal{D}'$ im Beispiel ist also eine Ableitung von B aus {D} ∪ {A ⊃ B, A & C}.

<u>Def.3:</u> Eine Formel A ist *ableitbar in* S_{AL} *aus* Γ ($\Gamma \vdash A$) gdw es gibt eine Ableitung in S_{AL} von A aus Γ. (Engl. *deducible* oder *derivable*)

<u>Def.4:</u> Ein *Beweis in* S_{AL} *von A* ist eine Ableitung in S_{AL} von A aus ∅. (D.h. ein Beweis ist eine Ableitung aus der leeren Menge von Hypothesen.) (Engl. *proof*)

<u>Def.5:</u> Eine Formel A ist *beweisbar in* S_{AL} ($\vdash A$) gdw es gibt einen Beweis in S_{AL} von A. Man sagt in diesem Fall auch: A ist ein *Theorem* oder *Satz* von S_{AL}. (Engl. *provable*)

<u>Def.6:</u> Eine Menge von Formeln Γ ist *konsistent in* S_{AL} (widerspruchsfrei) gdw es gibt eine Formel A, so dass gilt: nicht-($\Gamma \vdash A$). (Dies ist ein syntaktischer Konsistenzbegriff und muss sorgfältig vom semantischen Konsistenzbegriff (Erfüllbarkeit) unterschieden werden. (Engl. *consistent*)

Aus Def.6 ergibt sich, dass eine Menge von Formeln, Γ, *inkonsistent in* S_{AL} ist gdw sie nicht konsistent in S_{AL} ist, was wiederum bedeutet, dass aus einer solchen inkonsistenten Menge *alle* Formeln ableitbar sind, insbesondere A und $\sim A$, für jede Formel A.

<u>Def.7:</u> Ein Argument, $A_1, ..., A_n / \therefore B$, ist *gültig in* S_{AL} gdw $\{A_1, ..., A_n\} \vdash B$ (d.h. wenn die Konklusion aus den Prämissen in S_{AL} ableitbar ist).

<u>Def. 8:</u> Zwei Formeln, A und B, sind *äquivalent in* S_{AL} gdw $\{A\} \vdash B$ und $\{B\} \vdash A$ (d.h. wenn sie auseinander in S_{AL} ableitbar sind).

Strategien für die Regelanwendung

(i) Wenn du einen Konditional $A \supset B$ gewinnen willst, dann nimm zuvor das Antezedenz A als Hypothese in einer Subderivation an und versuche das Konsequent B in der Subderivation abzuleiten; dann kann der Konditional mit ⊃I gewonnen werden.

(ii) Wenn du eine Konjunktion A & B gewinnen willst, dann versuche zuvor jedes der beiden Konjunkte A und B unabhängig voneinander zu gewinnen; dann kann die Konjunktion mit &I gewonnen werden.

(iii) Wenn du eine Disjunktion $A \vee B$ gewinnen willst, dann versuche zuvor das eine (A) oder andere (B) Disjunkt abzuleiten; dann kann die Disjunktion mit ∨I gewonnen werden.

(iv) Wenn du eine Negation $\sim A$ gewinnen willst, dann nimm zuvor den negierten Satz A als Hypothese in einer Subderivation an und versuche, daraus irgendeine Kontradiktion B und $\sim B$ in der Subderivation abzuleiten; dann kann die Negation mit ~I gewonnen werden.

(v) Wenn du einen Bikonditional $A \equiv B$ gewinnen willst, dann versuche zuvor, in zwei Subderivationen, B aus der Hypothese A und A aus der Hypothese B abzuleiten; dann kann der Bikonditional mit ≡I gewonnen werden.

(vi) Wenn du eine Formel A gewinnen willst und dabei nicht vorankommst, dann versuche zuvor - als letztes Mittel - in einer Subderivation mit $\sim A$ als Hypothese eine Kontradiktion B und $\sim B$ abzuleiten; dann kann die doppelte Negation $\sim\sim A$ mit ~I gewonnen werden, und daraus wiederum A mit ~E gewonnen werden.

(vii) Wenn du eine Formel C gewinnen willst und die vorher abgeleiteten Formeln enthalten eine Disjunktion $A \vee B$, dann versuche zuvor C in jeweils zwei Subderivationen mit je A und B als Hypothesen abzuleiten; dann kann C mit ∨E gewonnen werden.

(viii) Wann immer eine Eliminations-Regel angewandt werden kann, wende sie an.

(ix) Reiteriere hemmungslos. Man kann dabei nichts falsch machen, höchstens unnötig reiterieren.

(x) Keep cool!!

Prädikatenlogik 1. Stufe mit Identität, PL1

Formalisieren in PL1 (Informelle Semantik)

Wörterbuch:

Du	:	u ist dick	Fu	:	u ist eine Frau	Gu	:	u ist ein Gott
Hu	:	u ist ein Mensch	Mu	:	u ist ein Mann	Pu	:	u ist eine Person
Su	:	u ist sterblich	Vu	:	u ist vergänglich			

Luv : u liebt v (v wird von u geliebt)

g : Gott h : Hans m : Maria s : Sokrates

Hans ist ein Mann	Mh
Maria ist kein Mann	~Mm
Wenn Sokrates ein Mensch ist, dann ist er sterblich	Hs ⊃ Ss
Maria liebt Hans aber nicht sich selbst	Lmh & ~Lmm
Alles ist vergänglich, Jedes Ding ist vergänglich	(∀x)Vx
Nicht alles ist sterblich	~(∀x)Sx
Es gibt etwas Unsterbliches	(∃x)~Sx
Es gibt Frauen, Die Menge der Frauen ist nicht leer	(∃x)Fx
Es gibt keinen Gott, Gott existiert nicht	~(∃x)Gx, (∀x)~Gx
Nichts ist unvergänglich	~(∃x)~Vx
Nicht alles ist unsterblich	~(∀x)~Sx
Alle Menschen sind sterblich, Jeder Mensch ist sterblich	(∀x)[Hx ⊃ Sx]
Einige Menschen sind Frauen, Mindestens ein Mensch ist eine Frau	(∃x)[Hx & Fx]
Einige Männer sind dick und einige sind nicht dick	(∃x)[Mx & Dx] & (∃x)[Mx & ~Dx]
Kein Mensch ist sowohl Frau als auch Mann	(∀x)[Hx ⊃ ~(Fx & Mx)]
Gott liebt jeden, Gott liebt alle	(∀x)[Px ⊃ Lgx]
Alle lieben Gott	(∀x)[Px ⊃ Lxg]
Gott liebt alles	(∀x)Lgx
Wenn Hans eine Frau liebt, dann Maria	(∃x)[Fx & Lhx] ⊃ Lhm

Für die folgenden Formalisierungen sei U (Universum, Diskurswelt, Universe of Discourse) die Menge aller Personen.

Jeder liebt jeden	(∀x)(∀y)Lxy
Jeder wird von jedem geliebt	(∀y)(∀x)Lxy
Alle lieben jemanden	(∀x)(∃y)Lxy
Jemand wird von allen geliebt	(∃y)(∀x)Lxy
Jeder Mann liebt eine Frau	(∀x)[Mx ⊃ (∃y)(Fy & Lxy)] (eine Lesart) (∃y)[Fy & (∀x)(Mx ⊃ Lxy)] (die andere Lesart)
Jemand liebt jemand andern	(∃x)(∃y)(~x=y & Lxy)
Hans liebt nur sich selbst	(∀x)(Lhx ⊃ x=h)

Formale Syntax der PL1

D1. Eine *Morphologie* M für PL1 ist eine Struktur, die aus folgenden Teilen besteht:

1. Eine unendliche Menge V_M von *Individuenvariablen*. (x, y, z, x_1, ...)
2. Eine unendliche Menge IP_M von *Individuenparametern*. (u, v, w, u_1, ...)
3. Eine Menge C_M von *Individuenkonstanten*. (a, b, c, a_1, ...)
4. Für jedes $i \geq 0$, eine Menge $P_M{}^i$ von i-stelligen *Prädikatenparametern*. (P^i, Q^i, R^i, ...)

(Üblicherweise wird das Superskript hier weggelassen, da sich die Stelligkeit eines Prädikatenparameters aus dem Kontext ergibt. Ein 0-stelliger Prädikatenparameter ist ein Satzparameter.)

(Die in 3. und 4. spezifizierten Mengen können auch leer sein.)

D2. Die Menge T_M der *Terme* einer Morphologie M ist $C_M \cup IP_M$. (s, t, t_1, ...)

D3. Die Menge F_M der *Formeln* einer Morphologie M für PL1 wird durch folgende Regeln definiert:

1. Wenn $s, t \in T_M$ ist, dann ist $s = t \in F_M$.
2. Wenn $P \in P_M{}^0$, dann ist $P \in F_M$.
3. Wenn $P \in P_M{}^n$, wobei $n > 0$, und $t_1, ..., t_n \in T_M$, dann ist $Pt_1 ... t_n \in F_M$.
4. Wenn $A \in F_M$, dann ist $\sim A \in F_M$.
5. Wenn $A, B \in F_M$, dann ist $(A \,\&\, B) \in F_M$.
6. Wenn $A, B \in F_M$, dann ist $(A \vee B) \in F_M$.
7. Wenn $A, B \in F_M$, dann ist $(A \supset B) \in F_M$.
8. Wenn $A, B \in F_M$, dann ist $(A \equiv B) \in F_M$.
9. Wenn $A \in F_M$, $x \in V_M$, und $u \in IP_M$, dann $(\forall x)A^x/_u \in F_M$. ("universelle Formel")
10. Wenn $A \in F_M$, $x \in V_M$, und $u \in IP_M$, dann $(\exists x)A^x/_u \in F_M$. ("existentielle Formel")

($A^x/_u$ ist das Resultat der simultanen Ersetzung aller Vorkommen von u in A durch x; wir nennen $(\forall x)$ und $(\exists x)$ den "All-" bzw. "Existenzquantor in der Variablen x".)

Formeln nach 1 - 3 heissen *atomare Formeln*, nach 4 - 8 *wahrheitsfunktionale Formeln* und nach 9 und 10 *generelle* oder *quantifizierte Formeln*.

Konnektive und Quantoren sind *Operatoren*. Der *Hauptoperator* einer Formel bestimmt, um was für eine Formel es sich handelt. Ist z.B. der Hauptoperator von A das Konnektiv &, so ist A eine Konjunktion; ist der Hauptoperator von A der Existenzquantor in der Variablen x, $(\exists x)$, so ist A eine existentielle Formel.

D4. Sei $A \in F_M$, $x \in V_M$, und $u \in IP_M$. Dann ist *u frei für x in A*, wenn kein Vorkommen von u in A in den Bereich (Skopus) eines Allquantors $(\forall x)$ oder eines Existenzquantors $(\exists x)$ fällt. (Wir fordern, dass dies bei einer "Quantifizierung", d.h. bei einer Anwendung der Regeln 9 und 10, immer der Fall ist.)

D5. Sei $A \in F_M$. Dann ist B eine *universelle Quantifizierung von A*, wenn es ein $u \in IP_M$ und ein $x \in V_M$ gibt, mit u frei für x in A, und B die Formel $(\forall x)A^x/_u$ ist. (Analog für *existentielle Quantifizierung*.)

D6. Sei A eine Quantifizierung, d.h. eine Formel der Form $(\forall x)B^x/_u$ oder $(\exists x)B^x/_u$, und sei $t \in T_M$. Dann ist jede Formel der Form $B^t/_u$ eine *Instanz* von A. ($B^t/_u$ ist wiederum das Resultat der simultanen Ersetzung aller Vorkommen von u in B durch t.)

Notationelle Varianten für Quantoren:

(x) und $(\exists x)$ (z.B. in Thomason), $\bigwedge x$ und $\bigvee x$ (oft in der deutschen Literatur), Πx und Σx (selten).

Formale Semantik der PL1

D1. Eine i-stellige Relation ($i \geq 1$) über einer Diskurswelt D ist eine Untermenge des kartesischen Produkts D^i.

D2. Sei D eine nicht-leere Menge und M eine Morphologie für PL1. Eine *Belegung einer Morphologie* M *für* PL1 *über der Diskurswelt* D ist eine Funktion V wie folgt:

1. Für jeden Term t von M, $V(t) \in D$.
2. Für jeden 0-stelligen Prädikatenparameter (d.h. Satzparameter) P von M, $V(P) \in \{W,F\}$.
3. Für jeden i-stelligen Prädikatenparameter Q ($i \geq 1$) von M, $V(Q)$ ist Untermenge von D^i.

D3. Sei V eine Belegung einer Morphologie M für PL1 über einer Diskurswelt D und sei $u \in IP_M$ und $d \in D$. Dann ist $V^d/_u$ eine Belegung wie V, mit dem möglichen Unterschied dass $V^d/_u$ an der Stelle u den Wert d zugewiesen bekommt. D.h. $V^d/_u(u) = d$. ("Semantische Substitution")

Der semantische Wert von Formeln einer Morphologie M für PL1 wird nun rekursiv wie folgt bestimmt:

Atomare Formeln

D4. Sei V eine Belegung einer Morphologie M für PL1 über einer Diskurswelt D und sei A eine atomare Formel von M. Falls A ein Satzparameter von M ist, dann ist der Wahrheitswert von A schon durch D2 bestimmt. Sonst gilt folgendes:

1. $V(Pt_1 \dots t_n) = W$ gdw $\langle V(t_1), \dots , V(t_n)\rangle \in V(P)$.
2. $V(s = t) = W$ gdw $V(s) = V(t)$.

Komplexe Formeln

D5.Sei V eine Belegung einer Morphologie M für PL1 über einer Diskurswelt D. Der Wahrheitswert einer komplexen Formel von M wird gemäss folgender semantischer Regeln bestimmt:

1. $V({\sim}A) = W$ gdw $V(A) = F$.
2. $V(A \;\&\; B) = W$ gdw sowohl $V(A) = W$ als auch $V(B) = W$.
3. $V(A \vee B) = W$ gdw entweder $V(A) = W$ oder $V(B) = W$.
4. $V(A \supset B) = W$ gdw $V(A) = F$ oder $V(B) = W$.
5. $V(A \equiv B) = W$ gdw $V(A) = V(B)$.
6. $V((\forall x)A^x/_u) = W$ gdw für alle $d \in D$, $V^d/_u(A) = W$.
7. $V((\exists x)A^x/_u) = W$ gdw für mindestens ein $d \in D$, $V^d/_u(A) = W$.

Definition einiger semantischer Begriffe.

D6. Eine Formel A von M ist *erfüllbar* wenn es eine nicht-leere Diskurswelt D und eine Belegung V von M über D gibt, so dass gilt: $V(A) = W$.

D7. Eine Formel A von M ist *gültig* wenn für jede nicht-leere Diskurswelt D und jede Belegung V von M über D gilt: $V(A) = W$.

D8. Sei Γ eine Menge von Formeln einer Morphologie M von PL1 und sei V eine Belegung von M über D. Die Belegung V *erfüllt* Γ *simultan*, wenn V jede Formel in Γ erfüllt. Man sagt in diesem Fall auch, dass V ein *Modell von* Γ ist. (Üblich ist auch die Schreibweise: das Paar $\mathfrak{M} = \langle D, V\rangle$ ist Modell von Γ, oder abgekürzt: $\langle D,V\rangle$ Mod Γ.)

D9. Sei Γ eine Menge von Formeln einer Morphologie M für PL1. Dann ist Γ *simultan erfüllbar*, wenn es eine nicht-leere Diskurswelt D und eine Belegung V von M über D gibt, die Γ simultan erfüllt. (Eine Menge von Formeln ist also simultan erfüllbar, wenn sie mindestens ein Modell hat.)

D10. Sei Γ eine Menge von Formeln einer Morphologie M und sei A eine Formel von M.

Γ *impliziert logisch* A (A folgt logisch aus Γ, $\Gamma \models A$) wenn für jede nicht-leere Diskurswelt D und jede Belegung V von M über D, die Γ simultan erfüllt, gilt, dass V auch A erfüllt.

(Eine Menge von Formeln Γ impliziert also logisch eine Formel A, wenn A in jedem Modell von Γ wahr ist.)

Neben diesen absoluten Begriffen ist es nützlich, auch die entsprechenden, auf ein festes D eingeschränkten Begriffe zu haben.

D11. Eine Formel A einer Morphologie M für PL1 ist *erfüllbar in* D, wobei D eine nicht-leere Diskurswelt ist, wenn es eine Belegung V von M über D gibt so dass gilt: $V(A) = W$.

(Analoge Definitionen kann man für Gültigkeit, simultane Erfüllbarkeit und logische Folgerung einführen.)

Die absoluten und auf ein bestimmtes D relativierten Begriffe unterscheiden sich. So ist z.B. $(\exists x)(\exists y){\sim}x{=}y$ erfüllbar, aber nicht erfüllbar in $D = \{1\}$, und $(\forall x)(\forall y)((Px \;\&\; Py) \supset x{=}y)$ ist gültig in $D = \{1\}$ aber nicht gültig. Man sieht weiterhin leicht ein, dass $(\exists x)(\exists y){\sim}x{=}y$ nicht nur in $D = \{1\}$ nicht erfüllbar ist, sondern in jeder 1-elementigen Diskurswelt. Es kommt also nur auf die Anzahl der Elemente einer Diskurswelt D an, und nicht auf ihre speziellen Elemente, ob eine Formel in ihr z.B. gültig ist.

Obwohl Belegungen *unendliche* Funktionen sind, kann man beweisen, dass für die Bewertung einer (Menge von) Formel(n) nur die Einschränkung der Belegung auf die Terme und Satz- und Prädikatenparameter einer Morphologie M, die in der (Menge von) Formel(n) tatsächlich vorkommen, relevant ist. Wir müssen also bei unseren Beispielen nur einen endlichen Ausschnitt einer Belegung betrachten.

Einige Erläuterungen zum Modellbegriff

Modelle einer Menge von Formeln Γ sind die Strukturen (Diskurswelten mit Eigenschaften und Relationen über deren Elementen), von denen Γ "handelt". Eine Menge von Formeln hat üblicherweise viele verschiedene Modelle. Durch Hinzunahme von zusätzlichen "Postulaten" werden die Modelle eingeschränkt. Wir können dies in folgendem semantischen Metatheorem zusammenfassen:

M1. Wenn $\Gamma' \subseteq \Gamma$ dann ist jedes Modell von Γ auch Modell von Γ'.

Je kleiner also eine Menge von Formeln ist, desto mehr Modelle hat sie. Die kleinste Menge ist die leere Menge, und für sie gilt, dass jede Struktur ein Modell dieser Menge ist. In einem Modell von Γ sind nicht nur die Formeln von Γ wahr, sondern auch alle logischen Folgerungen von Γ. Wir führen einen Begriff ein für die Menge der logischen Folgerungen einer Menge Γ.

D12. Sei Γ eine Menge von Formel von PL1. Dann ist $Cn(\Gamma) = \{A : A$ ist Formel von PL1 und $\Gamma \models A\}$. Wir nennen $Cn(\Gamma)$ die Folgerungs- oder *Konsequenzenmenge* von Γ.

Die Konsequenzenmenge der leeren Menge, $Cn(\emptyset)$, ist also die Menge der gültigen Formeln. Eine gültige Formel ist also in jeder Struktur wahr, d.h. jede Struktur genügt den logischen Gesetzen.

Es gilt weiterhin, dass

M2. Jedes Modell von Γ ist auch Modell von $Cn(\Gamma)$.

M3. Wenn $A \in \Gamma$, dann $A \in Cn(\Gamma)$. ($\Gamma \subseteq Cn(\Gamma)$)

M4. Wenn $\Gamma' \subseteq \Gamma$ dann $Cn(\Gamma') \subseteq Cn(\Gamma)$. ("Monotonie")

M5. $Cn(Cn(\Gamma)) = Cn(\Gamma)$. ("Idempotenz")

Das letzte Metatheorem besagt, dass durch Iteration der Cn-Funktion nichts mehr hinzugewonnen wird.

Ein System des Natürlichen Schliessens für PL1$_=$, $S_{PL1=}$

Das System $S_{PL1=}$ ist eine Erweiterung des Systems für die AL. Es besteht aus den 12 Regeln für AL-Derivationen plus den folgenden 6 Regeln.

∀I - "All-Introduktion" oder "All-Einführung" (auch: All-Generalisierung)

∀E - "All-Eliminierung" (auch: All-Spezifizierung oder All-Instantiierung)

∃I - "Existenz-Introduktion" oder "Existenz-Einführung" (auch: Existenz-General.)

∃E - "Existenz-Eliminierung" (auch: Existenz-Instantiierung)

=I - "Identitäts-Introduktion" oder "Identitäts-Einführung"

=E - "Identitäts-Eliminierung"

(Man sieht also, dass für jede der drei zusätzlichen logischen Konstanten der Prädikationlogik, ∀, ∃ und =, je eine Introduktions- und eine Eliminierungsregel gebraucht wird.)

Folgende Konventionen werden verwendet für Metavariable:

x, y, z... für Individuenvariablen

s, t, t_1... für Terme allgemein (d.h. für Individuenkonstanten und -parameter)

u, v, w ... für Individuenparameter (für sogen. "willkürlich gewählte Individuen")

A, B, C ... für Formeln (Aussagen) allgemein

P, Q, R ... für i-stellige Prädikatenparameter, i≥0, (manchmal zur Verdeutlichung auch P^i, ...)

Wie üblich verstehen wir unter $A^t/_u$ bzw. $A^x/_u$ das Resultat der Ersetzung jedes Vorkommens des Individuenparameters u in der Formel A durch den Term t oder die Variable x.

Im folgenden also die neuen Regeln, für die im übrigen dieselben Beschränkungen gelten wie im System S_{AL}.

Regeln für den All-Quantor

Regel der ∀–Introduktion (∀I)

Wenn man in einer Derivation $\mathcal{D}$ zeigen kann, dass A, für ein beliebiges Individuum u (hinter einer mit u beflaggten Linie), dann kann man zu einem späteren Zeitpunkt eine Allquantifizierung von A, $(\forall x)A^x/_u$, in der Derivation $\mathcal{D}$ hinschreiben.

Regel der ∀–Eliminierung (∀E)

Wenn man in einer Derivation $\mathcal{D}$ eine universelle Formel, $(\forall x)A^x/_u$, hat, so kann man zu einem späteren Zeitpunkt eine beliebige Instanz dieser Formel, $A^t/_u$, in der Derivation $\mathcal{D}$ hinschreiben.

Schematische Darstellung der Regeln für den All-Quantor

	u	
	⋮	
i	A	
	⋮	
j	$(\forall x)A^x/u$	i, ∀I

	⋮	
i	$(\forall x)A^x/u$	
	⋮	
j	A^t/u	i, ∀E

Bemerkung zu ∀I: Die Formel A muss hinter einer "Barriere" mit der "Flagge" u gewonnen werden. Diese mit u beflaggte Barriere soll verhindern, dass durch sie hindurch Formeln, in denen u vorkommt reiteriert oder sonstwie eingeführt werden. Weiterhin ist klar, dass $(\forall x)A^x/_u$, die Konklusion der Regel, keine Vorkommen von u enthält. Intuitiv bedeuten diese Beschränkungen, dass man eben keine speziellen Annahmen über dieses "willkürlich gewählte Individuum u" "einschmuggeln" darf, und dass der willkürlich gewählte Term auch wieder beseitigt werden muss. u ist eben nur ein temporärer Name für ein willkürlich gewähltes Objekt aus der Diskurswelt.

Regeln für den Existenz-Quantor

Regel der ∃–Introduktion (∃I)

Wenn man in einer Derivation $\mathcal{D}$ eine beliebige Instanz,$A^t/_u$, einer existentiellen Formel, $(\exists x)A^x/_u$, hat, dann kann man zu einem späteren Zeitpunkt diese existenielle Formel, $(\exists x)A^x/_u$, in der Derivation $\mathcal{D}$ hinschreiben.

Regel der ∃–Eliminierung (∃E)

Wenn man in einer Derivation $\mathcal{D}$ eine existentielle Formel, $(\exists x)A^x/_u$, hat, und eine Subderivation, deren einzige Hypothese A und deren letzte Zeile B ist und deren Derivationslinie mit u beflaggt ist, so kann man zu einem späteren Zeitpunkt die Formel B in der Derivation $\mathcal{D}$ hinschreiben.

Schematische Darstellung der Regeln für den Existenz-Quantor

i	$(\exists x)A^x/u$	
j	u A	Hyp
	⋮	
k	B	
l	B	i, j-k, ∃E

	⋮	
i	A^t/u	
	⋮	
j	$(\exists x)A^x/u$	i, ∃I

Bemerkung zu ∃E: Die Formel B muss hinter einer mit u beflaggten Barriere und in einer hypothetischen Ableitung mit A als einziger Hypothese abgeleitet werden. Die Barriere hat denselben Zweck wie in der Regel ∀I: zu verhindern, dass Formeln, in denen u vorkommt, durch die Barriere "ein- und ausgeführt" werden. Insbesondere darf also die Formel B den "willkürlich gewählten" Term u nicht mehr enthalten. Die Hypothese A ist die Formel, aus der $(\exists x)A^x/_u$ durch existentielle Quantifizierung gewonnen wurde, die eventuell den "willkürlich gewählten Term" oder Individuenparameter u enthält. Intuitiv soll $u$das Individuum bezeichnen, von dessen Existenz wir wissen (durch $(\exists x)A^x/_u$), dessen Identität wir jedoch nicht kennen. u ist also auch hier wieder ein temporärer Name für solch ein unspezifiziert gelassenes Individuum aus der Diskurswelt.

Regeln für die Identität

Regel der =–Introduktion (=I)

Man kann in einer Derivation $\mathcal{D}$ zu jeder Zeit eine Formel $t = t$ hinschreiben.

Regel der =–Eliminierung (=E)

Wenn man in einer Derivation $\mathcal{D}$ eine Identitätsformel, $s= t$, und eine Formel A hat, so kann man zu einem späteren Zeitpunkt, die Formel $A({}^t//_s)$, in der Derivation $\mathcal{D}$ hinschreiben.

(wobei $A({}^t//_s)$ ein Resultat der Ersetzung von keinem, einigen oder allen Vorkommen von s in A durch t ist)

Schematische Darstellung der Regeln für die Identität

i	$s = t$	
	⋮	
j	A	
	⋮	
k	$A({}^t//_s)$	i, j, =E

	⋮	
i	$t = t$	=I
	⋮	

Beachte, dass =I eine Regel ohne Prämissen ist.

Deduktive Strategien für Quantoren-regeln

Zusätzlich zu den Strategien für die Regeln für Konnektive können wir auch für die Quantorenregeln Strategien angeben, die helfen sollen, Formeln einer bestimmten quantorenlogischen Form zu gewinnen oder auszunutzen.

(i) Wenn du einen Allsatz, $(\forall x)A^x/u$, gewinnen willst, dann versuche zuvor A hinter einer mit u beflaggten Barriere zu gewinnen; dann kann man den Allsatz mit ∀I einführen.

(ii) Wenn du einen Existenzsatz, $(\exists x)A^x/_u$, gewinnen willst, dann versuche zuvor irgendeine Instanz, $A^t/_u$, zu gewinnen; dann kann man den Existenzsatz mit ∃I einführen.

(iii) Wenn du eine Formel B gewinnen willst und die schon gewonnenen Formeln einen Existenzsatz, $(\exists x)A^x/_u$, enthalten, dann versuche B zuvor hinter einer mit u beflaggten Barriere und in einer Subderivation mit A als Hypothese zu gewinnen; dann kann B mit ∃E gewonnen werden.

(iv) Verwende ∀E grosszügig; man kann dabei nicht fehlgehen, höchstens zu viele unnötige Instanzen ableiten.

Beweistheoretische Begriffe von $S_{PL1=}$

Im Folgenden einige Begriffe der Beweistheorie von $S_{PL1=}$. Diese Begriffe sind ganz analog zu den entsprechenden Begriffen in S_{AL} (siehe zugehöriges Handout), nur dass eben jetzt auf Formeln und Regeln von $S_{PL1=}$ Bezug genommen wird. Die Bemerkungen in dem Handout "Beweistheoretische Begriffe von S_{AL}" über die Beziehung zwischen den hier definierten syntaktischen Begriffen und den früher eingeführten semantischen Begriffen gelten hier ebenso.

Wieder sind die Hypothesen einer Derivation in $S_{PL1=}$ nur diejenigen Formeln von $S_{PL1=}$, die Gegenstände der Derivation sind und oberhalb des Hypothesenstrichs der zugehörigen Derivationslinie stehen. (Also insbesondere nicht die Hypothesen von Subderivationen der Derivation.)

Def.1: Eine **Ableitung in $S_{PL1=}$** ist eine Derivation, in der jede Zeile durch eine der Regeln von $S_{PL1=}$ gewonnen wurde. (Engl. *deduction*)

Def.2: Eine **Ableitung in $S_{PL1=}$ von A aus Γ** ist eine Ableitung in $S_{PL1=}$, deren Hypothesen alle in Γ sind und deren letzter Gegenstand (*item*) A ist.

Def.3: Eine Formel A **ist ableitbar in $S_{PL1=}$ aus Γ** ($\Gamma \vdash A$) gdw es gibt eine Ableitung in $S_{PL1=}$ von A aus Γ. (Engl. *deducible* oder *derivable*)

Def.4: Ein **Beweis in $S_{PL1=}$ von A** ist eine Ableitung in S_{PL1} von A aus $\varnothing$. (D.h. ein Beweis ist eine Ableitung aus der leeren Menge von Hypothesen.) (Engl. *proof*)

Def.5: Eine Formel A **ist beweisbar in $S_{PL1=}$** ($\vdash A$) gdw es gibt einen Beweis in $S_{PL1=}$ von A. Man sagt in diesem Fall auch: A ist ein *Theorem* oder *Satz* von $S_{PL1=}$. (Engl. *provable*)

Def.6: Eine Menge von Formeln Γ **ist konsistent in $S_{PL1=}$** (widerspruchsfrei) gdw es gibt eine Formel A so dass gilt: nicht-($\Gamma \vdash A$). (Dies ist ein syntaktischer Konsistenzbegriff und muss sorgfältig vom semantischen Konsistenzbegriff (Erfüllbarkeit) unterschieden werden. (Engl. *consistent*)

Aus Def.6 ergibt sich, dass eine Menge von Formeln, Γ, **inkonsistent in $S_{PL1=}$** ist gdw sie nicht konsistent in $S_{PL1=}$ ist, was wiederum bedeutet, dass aus einer solchen inkonsistenten Menge *alle* Formeln ableitbar sind, insbesondere A und $\sim A$, für jede Formel A.

Def.7: Ein Argument, $A_1, ..., A_n / \therefore B$, **ist gültig in $S_{PL1=}$** gdw $\{A_1, ..., A_n\} \vdash B$ (d.h. wenn die Konklusion aus den Prämissen in $S_{PL1=}$ ableitbar ist).

Def. 8: Zwei Formeln, A und B, sind **äquivalent in $S_{PL1=}$** gdw $\{A\} \vdash B$ und $\{B\} \vdash A$ (d.h. wenn sie auseinander in $S_{PL1=}$ ableitbar sind).

Aussagenlogische Äquivalenzen

1. Doppelte Negation:

(a) $\sim\sim A$	ist äquivalent mit	A

2. De Morgan´sche Gesetze:

(a) $\sim(A \vee B)$	ist äquivalent mit	$\sim A \ \& \sim B$
(b) $\sim(A \ \& \ B)$	ist äquivalent mit	$\sim A \vee \sim B$

3. Äquivalenz von Konnektiven:

(a) A v B	ist äquivalent mit	$\sim A \supset B$
(b) $A \supset B$	ist äquivalent mit	$\sim A \vee B$
(c) $A \ \& \ B$	ist äquivalent mit	$\sim(A \supset \sim B)$
(d) $A \supset B$	ist äquivalent mit	$\sim(A \ \& \sim B)$
(e) $A \supset (B \supset C)$	ist äquivalent mit	$(A \ \& \ B) \supset C$
(f) $A \equiv B$	ist äquivalent mit	$(A \supset B) \ \& \ (B \supset A)$

4. Kontraposition:

(a) $A \supset B$	ist äquivalent mit	$\sim B \supset \sim A$
(b) $\sim A \supset B$	ist äquivalent mit	$\sim B \supset A$
(c) $A \supset \sim B$	ist äquivalent mit	$B \supset \sim A$

5.Kommutativität:

(a) $A \vee B$	ist äquivalent mit	$B \vee A$
(b) $A \ \& \ B$	ist äquivalent mit	$B \ \& \ A$
(c) $A \equiv B$	ist äquivalent mit	$B \equiv A$

6. Assoziativität:

(a) $A \vee (B \vee C)$	ist äquivalent mit	$(A \vee B) \vee C$
(b) $A \ \& \ (B \ \& \ C)$	ist äquivalent mit	$(A \ \& \ B) \ \& \ C$
(a) $A \equiv (B \equiv C)$	ist äquivalent mit	$(A \equiv B) \equiv C$

7. Distributivität:

(a) $A \vee (B \ \& \ C)$	ist äquivalent mit	$(A \vee B) \ \& \ (A \vee C)$
(b) $A \ \& \ (B \vee C)$	ist äquivalent mit	$(A \ \& \ B) \vee (A \ \& \ C)$
(c) $A \supset (B \ \& \ C)$	ist äquivalent mit	$(A \supset B) \ \& \ (A \supset C)$
(d) $A \supset (B \vee C)$	ist äquivalent mit	$(A \supset B) \vee (A \supset C)$
(e) $(A \vee B) \supset C$	ist äquivalent mit	$(A \supset C) \ \& \ (B \supset C)$ **!!!**
(f) $(A \ \& \ B) \supset C$	ist äquivalent mit	$(A \supset C) \vee (B \supset C)$ **!!!**

8. Absorption:

(a) $A \vee (A \,\&\, B)$	ist äquivalent mit	A
(b) $A \,\&\, (A \vee B)$	ist äquivalent mit	A

9. Verum und Falsum:

(a) $A \,\&\, (B \vee \sim B)$	ist äquivalent mit	A
(b) $A \vee (B \,\&\, \sim B)$	ist äquivalent mit	A
(c) $A \vee (B \vee \sim B)$	ist äquivalent mit	$B \vee \sim B$
(d) $A \,\&\, (B \,\&\, \sim B)$	ist äquivalent mit	$B \,\&\, \sim B$

10. Idempotenz:

(a) $A \vee A$	ist äquivalent mit	A
(a) $A \,\&\, A$	ist äquivalent mit	A

Prädikatenlogische Äquivalenzen und Implikationen

1. Quantoren und Negation:

$\sim(\forall x)A^x/_u$	ist äquivalent mit	$(\exists x) \sim A^x/_u$
$\sim(\exists x)A^x/_u$	ist äquivalent mit	$(\forall x) \sim A^x/_u$
$(\exists x)A^x/_u$	ist äquivalent mit	$\sim(\forall x) \sim A^x/_u$
$(\forall x)A^x/_u$	ist äquivalent mit	$\sim(\exists x) \sim A^x/_u$

2. Quantoren und Quantoren:

$(\forall x)(\forall y)A^x/_u{}^y/_v$	ist äquivalent mit	$(\forall y)(\forall x)A^x/_u{}^y/_v$	
$(\exists x)(\exists y)A^x/_u{}^y/_v$	ist äquivalent mit	$(\exists y)(\exists x)A^x/_u{}^y/_v$	
$(\exists x)(\forall y)A^x/_u{}^y/_v$	impliziert logisch	$(\forall y)(\exists x)A^x/_u{}^y/_v$	(nicht umgekehrt!)

3. Quantoren und Konnektive:

$(\forall x)[A^x/_u \;\&\; B^x/_u]$	ist äquivalent mit	$(\forall x)A^x/_u \;\&\; (\forall x)B^x/_u$	
$(\exists x)[A^x/_u \;\vee\; B^x/_u]$	ist äquivalent mit	$(\exists x)A^x/_u \;\vee\; (\exists x)B^x/_u$	
$(\forall x)A^x/_u \;\vee\; (\forall x)B^x/_u$	impliziert logisch	$(\forall x)[A^x/_u \;\vee\; B^x/_u]$	(nicht umgekehrt!)
$(\exists x)[A^x/_u \;\&\; B^x/_u]$	impliziert logisch	$(\exists x)A^x/_u \;\&\; (\exists x)B^x/_u$	(nicht umgekehrt!)
$(\forall x)[A^x/_u \;\&\; B]$	ist äquivalent mit	$(\forall x)A^x/_u \;\&\; B$	
$(\forall x)[A^x/_u \;\vee\; B]$	ist äquivalent mit	$(\forall x)A^x/_u \;\vee\; B$	
$(\exists x)[A^x/_u \;\&\; B]$	ist äquivalent mit	$(\exists x)A^x/_u \;\&\; B$	
$(\exists x)[A^x/_u \;\vee\; B]$	ist äquivalent mit	$(\exists x)A^x/_u \;\vee\; B$	
$(\forall x)[A^x/_u \supset B]$	ist äquivalent mit	$(\exists x)A^x/_u \supset B$	
$(\exists x)[A^x/_u \supset B]$	ist äquivalent mit	$(\forall x)A^x/_u \supset B$	
$(\forall x)[B \supset A^x/_u]$	ist äquivalent mit	$B \supset (\forall x)A^x/_u$	
$(\exists x)[B \supset A^x/_u]$	ist äquivalent mit	$B \supset (\exists x)A^x/_u$	