

Verbände als Ordnungen und Algebren (Beweise)

Beweis, dass algebraische und ordnungstheoretische Definitionen von Verbänden nur verschiedene Aspekte derselben Strukturen erfassen.

Beweis von: $\langle A, \leq \rangle \Rightarrow \langle A, \wedge, \vee \rangle$

Sei $\langle A, \leq \rangle$ eine Halbordnung mit den Verbandseigenschaften, d.h. für alle $a, b \in A$ gibt es $\sup\{a, b\}$ und $\inf\{a, b\}$.

Sei weiterhin $a \wedge b = \text{df } \inf\{a, b\}$
und $a \vee b = \text{df } \sup\{a, b\}$.

Dann ist $\langle A, \wedge, \vee \rangle$ eine Algebra mit den Verbandseigenschaften. D.h. es gelten die Idempotenz, Kommutativität, Assoziativität und die Absorptionsgesetze.

Beweis:

L1: Idempotenz: z.z. $a \wedge a = a$ und $a \vee a = a$

Beweis:

1. $\sup\{a\} = a$	Def. sup
2. $\sup\{a, a\} = a$	Mengenlehre
3. $a \vee a = a$	Def von $\vee$

L2: Kommutativität: z.z. $a \wedge b = b \wedge a$ und $a \vee b = b \vee a$.

Beweis:

1. $\sup\{a, b\} = \sup\{b, a\}$	Mengenlehre
2. $a \vee b = b \vee a$	Definition von $\vee$

L3: Assoziativität: z.z. $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$

Wir benötigen zu diesem Beweis folgendes Lemma:

Lemma 2: Wenn $a \leq b$ und $a \leq c$, dann $a \leq \inf\{b, c\}$.

(Beweis: Übungsaufgabe 3)

Beweis: z.z. $\inf\{\inf\{a, b\}, c\} = \inf\{a, \inf\{b, c\}\}$

und $e = \inf\{a, \inf\{b, c\}\}$.

Z.z. $d = e$. Dies zeigen wir, indem wir zeigen: $d \leq e$ und $e \leq d$ (dann ergibt sich $d = e$ wegen Antisymmetrie von $\leq$).

- | | |
|---|--|
| 0. $d = \inf\{\inf\{a, b\}, c\}$
1. $e = \inf\{a, \inf\{b, c\}\}$
2. $d \leq \inf\{a, b\}$
3. $d \leq c$
4. $\inf\{a, b\} \leq a$
5. $\inf\{a, b\} \leq b$
6. $d \leq a$
7. $d \leq b$
8. $d \leq \inf\{b, c\}$
9. $d \leq \inf\{a, \inf\{b, c\}\}$
10. $d \leq e$
11. $e \leq a$
12. $e \leq \inf\{b, c\}$
13. $\inf\{b, c\} \leq b$
14. $\inf\{b, c\} \leq c$
15. $e \leq b$
16. $e \leq c$
17. $e \leq \inf\{a, b\}$
18. $e \leq \inf\{\inf\{a, b\}, c\}$
19. $e \leq d$
20. $d = e$
21. $\inf\{\inf\{a, b\}, c\} = \inf\{a, \inf\{b, c\}\}$
22. $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$ | Annahme
Annahme
0, Def. u.S.
0, Def. u.S.
Def. inf
Def. inf
2,4, Transitivität
2,5, Transitivität
3,7, Lemma 2
6,8, Lemma 2
1,9, =Beseitigung
1, Def. u.S.
1, Def. u.S.
Def. inf
Def. inf
12,13, Transitivität
12,14, Transitivität
11,15, Lemma 2
16,17, Lemma 2
0,18, =Beseitigung
10,19, Antisymmetrie
20, 2 x =Beseitigung
21, Einsetzung der Def. |
|---|--|

L4: Absorption: z.z. $a = a \vee (a \wedge b)$

Hierzu benötigen wir folgendes Lemma.

Lemma 1: $b \leq a$ gdw $\sup\{a, b\} = a$.

(Beweis: Übungsaufgabe 2)

Beweis von Absorption:

- | | |
|--|---|
| 1. $\inf\{a, b\} \leq a$
2. $\inf\{a, b\} \leq a$ gdw $\sup\{a, \inf\{a, b\}\} = a$
3. $\sup\{a, \inf\{a, b\}\} = a$
4. $a = a \vee (a \wedge b)$ | Def. inf
Lemma 1
1,2, Äquiv.Beseitigung
Def. von $\wedge$ und $\vee$ |
|--|---|

Beweis von $\langle A, \wedge, \vee \rangle \Rightarrow \langle A, \leq \rangle$.

Sei $\langle A, \wedge, \vee \rangle$ eine Algebra mit den Verbandseigenschaften (d.h. L1 - L4).

Wir definieren $a \leq b \stackrel{\text{df}}{=} a \wedge b = a$.

Dann ist $\langle A, \leq \rangle$ ein Verband, d.h. eine Halbordnung ($\leq$ reflexiv, transitiv und antisymmetrisch), bei der es für je zwei Element a und b ein Supremum und ein Infimum gibt.

Beweis:

1) Reflexivität: z.z. für alle $a \in A$, $a \leq a$.

Beweis:

1. $a \wedge a = a$	Idempotenz
2. $a \leq a$	Def. $\leq$

2) Antisymmetrie: z.z. wenn $a \leq b$ und $b \leq a$, dann $a = b$.

Beweis:

1. $a \leq b$	Annahme
2. $b \leq a$	Annahme
3. $a \wedge b = a$	1, Def. $\leq$
4. $b \wedge a = b$	2, Def. $\leq$
5. $a \wedge b = b$	4, Kommutativität
6. $a = b$	3, 5, =Beseitigung

3) Transitivität: z.z. wenn $a \leq b$ und $b \leq c$ dann $a \leq c$

Beweis:

1. $a \leq b$	Annahme
2. $b \leq c$	Annahme
3. $a \wedge b = a$	1, Def. $\leq$
4. $b \wedge c = b$	2, Def. $\leq$
5. $a \wedge (b \wedge c) = a$	3, 4, =Beseitigung
6. $(a \wedge b) \wedge c = a$	5, Assoziativität
7. $a \wedge c = a$	3, 6, =Beseitigung
8. $a \leq c$	7, Def. $\leq$

4) Wir müssen nun noch zeigen, dass es zu je zwei Elementen $a, b \in A$ ein Supremum und ein Infimum gibt.

Wir definieren: $\sup\{a, b\} \stackrel{\text{df}}{=} a \vee b$.

Wir müssen zeigen, dass

(1)	$a \vee b$ eine o.S. von $\{a, b\}$ ist, und
(2)	$a \vee b$ die kleinste o.S. von $\{a, b\}$ ist.

Zu (1):

1. $a = a \wedge (a \vee b)$	Absorption
2. $b = b \wedge (b \vee a)$	Absorption
3. $b = b \wedge (a \vee b)$	2, Kommutativität
4. $a \leq a \vee b$	1, Def. $\leq$
5. $b \leq a \vee b$	3, Def. $\leq$
6. $a \vee b$ ist o.S. von $\{a, b\}$	4, 5, Def. o.S.

Zu (2):

z.z. $a \vee b$ ist die kleinste o.S. für $\{a, b\}$,
d.h. wenn für ein c : $a \leq c$ und $b \leq c$, dann $a \vee b \leq c$.

1. $a \leq c$	Annahme
2. $b \leq c$	Annahme
3. $c \vee (c \wedge a) = c$	Absorption
4. $(a \wedge c) \vee c = c$	3, 2xKommutativität
5. $a \wedge c = a$	1, Def. $\leq$
6. $a \vee c = c$	4, 5, =Beseitigung
7. $c \vee (c \wedge b) = c$	Absorption
8. $(b \wedge c) \vee c = c$	7, 2xKommutativität
9. $b \wedge c = b$	2, Def. $\leq$
10. $b \vee c = c$	8, 9, =Beseitigung
11. $c \vee c = c$	Idempotenz
12. $(a \vee c) \vee (b \vee c) = c$	6, 10, 11, 2x=Beseitigung
13. $(a \vee b) \vee c = c$	12, Komm., Assoz. und Idempotenz
14. $(a \vee b) \wedge [(a \vee b) \vee c] = (a \vee b)$	Absorption
15. $(a \vee b) \wedge c = a \vee b$	13, 14, =Beseitigung
16. $a \vee b \leq c$	15, Def. $\leq$