Mathematische Grundlagen der Computerlinguistik I

1. Übungsblatt (Mengenlehre)

I. Gegeben seien die Mengen: A = {a,b,c,2,3}, B = {a,b}, C = {c, 2}, D = {a,b,c}, E = {a,b,{c}}, F = $\emptyset$, G = {{a,b}, {c,2}}

Beantworte folgende Fragen mit wahr oder falsch (1 - 12), oder gibt die Menge an (13 - 21).

1. $c \in A$	2. $c \in F$	3. $c \in E$	4. $\{c\} \in E$	5. $\{c\} \in C$	6. $B \subseteq A$
7. $D \subset A$	8. $A \subseteq C$	9. $D \subseteq E$	10. $F \subseteq A$	11. $E \subseteq F$	12. $B \in G$

13. $B \cup C =$ 14. $A \cup B =$ 15. $D \cup E =$

16. $A \cap B =$ 17. $A \cap E =$ 18. $B \cap F =$

19. $A - B =$ 20. $B - A =$ 21. $G - B =$

II. Zeige, dass

1. $\emptyset \subseteq X$
2. $X \subseteq X$
3. Wenn $X \subseteq Y$ dann $X = X \cap Y$
4. $X \cup Y = Y \cup X$
5. $X - Y = X \cap (-Y)$
6. Wenn $\{x\} \subset \{x,y\}$, dann $x \neq y$
7. $\{x\} \in \mathbf{P}(\{x,y\})$
8. $\{x: x \in X \text{ und } x \in Y\} = X \cap Y$

III. Funktionen

1. Beschreibe - auf allgemeine Weise - für jede Menge X eine Funktion, die zu X^X gehört. Was ist, wenn $X = \emptyset$?

2. Gegeben $a \in X$, $b \in Y$, $f \in X \to (Y \to Z)$; was kann man über $(f(a))(b)$ sagen? (d.h. zu welcher Menge gehört $(f(a))(b)$?)

3. Gegeben $f \in C^{X \times Y}$, $x \in X$, $y \in Y$. Wende f auf x und y an. Was kann über den entsprechenden Funktionswert ausgesagt werden?

4. Für jedes x in Y gibt es eindeutig bestimmte y und z so dass gilt: $y \in Y$ und $z \in X$ und $f(x) = \langle y,z \rangle$. Also $f \in$? (d.h. beschreibe f in mengentheoretischer Funktionsnotation)

5. Sei $x \in \{a, b, c\}^N$, und x habe $\langle 3,b \rangle, \langle 4,b \rangle, \langle 8,c \rangle$ unter seinen Elementen.

   (1) Was für ein (mengentheoretischer) Gegenstand ist x?

   (2) Was ist dann x_4?

   (3) Erläutere deine Antworten zu folgenden Fragen.

   (a) Ist "x_{12}" bedeutungsvoll?

   (b) Ist "x_b" bedeutungsvoll?

   (c) Könnte $\langle 12,c \rangle$ ein Element von x sein? $\langle 12,3 \rangle$? $\langle 4,c \rangle$?

6. Sei g die Funktion "Vater von" und f die Funktion "Mutter von" über der Menge der Menschen. Welche Funktionen sind dann die Kompositionen $g \circ f$, $f \circ g$ und $f \circ f$?

7. Sei f die Funktion "Mutter von" über der Menge der Menschen. Was ist dann die Umkehrrelation von f, d.h. f^{-1}? Ist das auch eine Funktion?

Mathematische Grundlagen der Computerlinguistik I

2. Übungsblatt (Algebren und Gruppen)

1. Welche der folgenden Strukturen sind Gruppen?

   a) Die ganzen Zahlen 1, 3, 4, 5, 9 unter der Multiplikation modulo 11.

   b)

°	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	a
d	d	c	b	b

2. Zeige, dass die Menge, die nur aus dem Einselement besteht, eine Untergruppe jeder Gruppe ist.

3. Sei A = {a, b}. Zeige, dass $<\wp(A), \cup>$ und $<\wp(A), \cap>$ beides Halbgruppen, aber keine Gruppen, sind. Finde einen Isomorphismus zwischen ihnen.

4. Zeige, dass in einer Gruppe das inverse Element (zu einem Element) eindeutig bestimmt ist.

5. Zeige, dass das neutrale Element sein eigenes Inverses ist.

6. Zeige - für den Beweis, dass der "Durchschnitt" zweier Untergruppen **G'** und **G"** einer Gruppe **G**, **G'** $\cap$ **G"**, wieder eine Untergruppe von **G** ist -

   a) dass jedes Element *a* in **G'** $\cap$ **G"** ein Inverses hat, und

   b) dass **G'** $\cap$ **G"** ein neutrales Element hat.

Mathematische Grundlagen der Computerlinguistik I

3. Übungsblatt (Ordnungen und Verbände)

1) Zeichne das Hasse-Diagramm für die Potenzmenge von {1, 2, 3} mit der Ordnungsrelation $\subseteq$. Ist diese Halbordnung ein Verband?

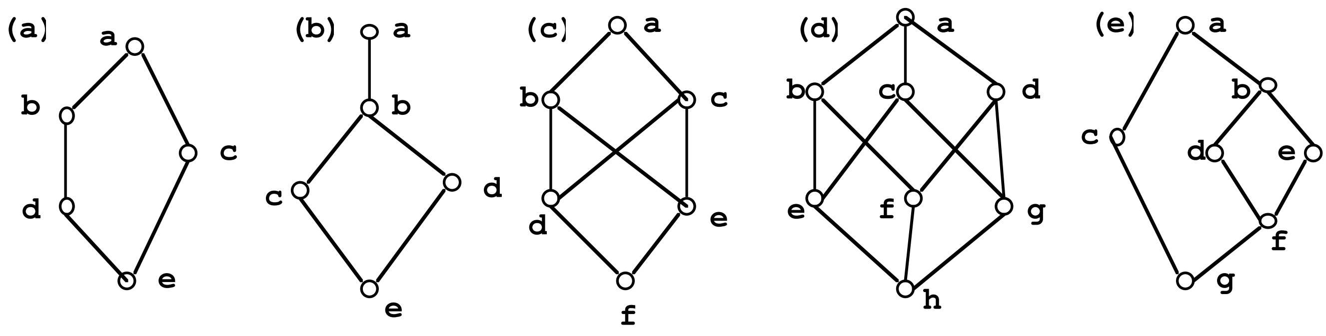
2) Beweise Lemma 1: $b \leq a$ gdw $\sup\{a,b\} = a$.

   (Hinweis: Zerlege die Äquivalenz in zwei konditionale Aussagen und beweise die Letzteren.)

3) Beweise Lemma 2: Wenn $a \leq b$ und $a \leq c$, dann $a \leq \inf\{b,c\}$.

4) Zeige: Wenn $a = \inf B$ und $a = \sup B$, dann $B = \{a\}$.

5) Welche der folgenden Strukturen sind Verbände? Für diejenigen, die keine Verbände sind, gib eine Begründung.



Mathematische Grundlagen der Computerlinguistik I

4. Übungsblatt (Formalisieren in der Aussagenlogik)

Wörterbuch:

P	:	Paul besteht (die Prüfung).	Q	:	Kurt besteht.
R	:	Rolf besteht.	S	:	Paul studiert fleissig.
M	:	Paul ist müde.			

Formalisiere die folgenden deutschen Sätze in AL. Benutze das angegebene Wörterbuch.

1. Paul studiert fleissig, ausser wenn er müde ist, in welchem Fall er es nicht tut.

2. Paul studiert fleissig nur, falls er nicht müde ist.

3. Paul besteht, wenn - aber nur wenn - er fleissig studiert oder nicht müde ist.

4. Paul studiert fleissig und besteht, oder er tut's nicht (und besteht dann auch nicht).

5. Falls Paul besteht, solange er nicht müde ist, dann besteht er sicher, wenn er fleissig studiert.

6. Obwohl er müde ist, besteht Paul trotzdem.

7. Wenn Paul fleissig studiert, dann besteht er, vorausgesetzt er ist nicht müde.

8. Paul besteht nicht, ausser er studiert fleissig.

9. Nicht mehr als einer von den dreien wird bestehen.

10. Wenn Paul besteht, dann nur wenn er fleissig studiert hat.

11. Paul studiert fleissig, und trotzdem fällt er durch, wenn er müde ist.

12. Wenn entweder Kurt oder Rolf besteht, dann auch Paul, ausser wenn er müde ist.

13. Rolf und Kurt bestehen sicher; Paul, jedoch, wird durchfallen, falls er nicht fleissig studiert (und selbst wenn er's tut, wird er durchfallen).

14. Genau zwei von ihnen bestehen.

15. Paul besteht nicht, aber mindestens einer der andern zwei besteht.

16. Es werden nicht alle durchfallen.

Mathematische Grundlagen der Computerlinguistik I

5. Übungsblatt (Formale Semantik der Aussagenlogik)

1. Formalisiere folgendes Argument und prüfe mit der vollständigen Wahrheitstafelmethode, ob es AL-gültig oder -ungültig ist.

   Albert ist entweder ein Narr oder ein Lügner.
   Wenn er ein Lügner ist, dann ist das, was er mir über seine Schwester erzählt hat, falsch, und er hat mich für dumm verkauft.
   Also ist Albert ein Narr, oder er hat mich für dumm verkauft.

2. Zeige, dass alle AL-wahren Formeln komplex sein müssen.

3. a) Zeige, dass alle AL-wahren Formeln zueinander äquivalent sind.

   b) Zeige, dass alle AL-falschen Formeln zueinander äquivalent sind.

4. a) Kann ein AL-gültiges Argument, dessen Prämissen alle wahr sind, eine falsche Konklusion haben?

   b) Kann ein AL-gültiges Argument mit einer falschen Prämisse eine wahre Konklusion haben?

   c) Kann ein AL-ungültiges Argument mit nur wahren Prämissen eine wahre Konklusion haben?

5. Wenn zwei Formeln A und B äquivalent sind, was wissen wir dann über die Argumente $A / \therefore B$ und $B / \therefore A$?

6. Zeige, dass $A_1, ..., A_n \models B$, falls $\{A_1, ..., A_n\} \cup \{\sim B\}$ simultan unerfüllbar ist.

Mathematische Grundlagen der Computerlinguistik I

6. Übungsblatt (Kurze Wahrheitstafelmethode)

Bestimme mit der kurzen Wahrheitstafelmethode, ob

1) $(A \supset B) \supset (((C \supset D) \& (A \vee D)) \supset (B \vee C))$ AL-wahr, AL-falsch oder AL-nicht-determiniert ist;

2) $I \supset (J \vee K), (J \& K) \supset L \;/\!\therefore\; I \supset L$ AL-gültig ist;

3) $\{A \supset (B \& C), B \supset (D \& E), (A \supset D) \supset (F \equiv G), A \supset (B \supset {\sim}F), {\sim}F \supset ({\sim}G \supset {\sim}E), {\sim}E\}$ simultan erfüllbar ist;

4) $M \supset (N \& O), (N \vee O) \supset P \models M \supset P$;

5) $(P \& Q) \supset R$ mit $P \vee {\sim}(R \& {\sim}Q)$ AL-äquivalent ist.

Mathematische Grundlagen der Computerlinguistik I

7. Übungsblatt (Natürliches Schliessen in der AL)

Zeige, durch Konstruktion einer Derivation, dass folgende Aussagen wahr sind.

Zunächst einige Aufgaben, die "hypothetische" Derivationen (Ableitungen) verlangen.

1. $P \supset (Q \supset R) \vdash Q \supset (P \supset R)$
2. $P \supset (P \supset Q) \vdash P \supset Q$
3. $(P \supset Q) \supset (P \supset R), Q \vdash P \supset R$
4. $P \supset (Q \supset {\sim}P), P \supset Q \vdash {\sim}P$
5. $(P \supset Q) \supset (Q \supset R), Q \vdash Q \supset R$
6. $P \supset (Q \supset {\sim}P) \vdash Q \supset {\sim}P$
7. ${\sim}P \supset {\sim}Q \vdash Q \supset P$
8. ${\sim}{\sim}P, Q \supset {\sim}P \vdash {\sim}(P \supset Q)$
9. ${\sim}(P \,\&\, {\sim}Q) \vdash P \supset Q$
10. $P \supset (R \,\&\, S), Q \supset ({\sim}R \,\&\, {\sim}S) \vdash {\sim}(P \,\&\, Q)$
11. $P \vee Q , P \supset R , Q \supset S \vdash R \vee S$
12. $P \supset Q , {\sim}(Q \vee R) \vdash {\sim}(P \vee R)$
13. $(P \vee Q) \,\&\, R \vdash (P \,\&\, R) \vee Q$
14. $(P \supset Q) \supset (R \vee S) \vdash {\sim}S \supset (R \vee P)$
15. $(P \supset Q) \supset Q , Q \supset {\sim}Q \vdash P$

Für die folgenden Aufgaben muss man "kategorische" Derivationen (Beweise) konstruieren.

16. $\vdash P \vee (P \supset Q)$
17. $\vdash (Q \vee Q) \supset Q$
18. $\vdash (P \supset Q) \equiv ({\sim}P \vee Q)$
19. $\vdash (P \vee Q) \equiv {\sim}({\sim}P \,\&\, {\sim}Q)$
20. $\vdash ((P \supset Q) \supset P) \supset P$

Mathematische Grundlagen der Computerlinguistik I

8. Übungsblatt (Formalisieren in der Prädikatenlogik 1. Stufe)

Formalisiere die folgenden deutschen Sätze in PL1.

1. Ärzte, die arm sind, existieren nicht.
2. Nicht alle Bücher im Regal sind lesenswert.
3. Keines der Bücher im Regal ist lesenswert
4. Äpfel und Orangen sind köstlich und nahrhaft.
5. Wenn alle Steuerhinterzieher erwischt werden, dann auch mein Onkel
6. Wenn ein Steuerhinterzieher erwischt wird, dann mein Onkel.
7. Hans hat Vertrauen in sich selbst nur wenn ein anderer es auch hat.
8. Nur Logiker und Philosophen verstehen alles.
9. Nur Logiker und Philosophen verstehen etwas.
10. Hans ist grösser als alle, die er kennt.
11. Maria mag alle, die ihr zuhören.
12. Etwas fehlt, ausser wenn Hans nicht richtig gezählt hat.
13. Alle hier fahren im selben Auto mit.
14. Wer zuletzt lacht, lacht am besten.
15. Es gibt einige Heilmittel, die schlimmer sind als die Krankheit.
16. Keiner wird nominiert, der nicht die Zustimmung eines jeden Komitee-Mitglieds findet.
    (c : das Komitee)
17. Es gibt mindestens zwei MdBs, die über 80 sind.

Mathematische Grundlagen der Computerlinguistik I

9. Übungsblatt (Semantik der Prädikatenlogik 1. Stufe)

1. Sei D = {1} und seien P und Q 1-stellige Prädikatenparameter und sei S ein 2-stelliger Prädikatenparameter.

   a) Wie viele verschiedene Belegungen bezüglich P und Q gibt es über D?

   b) Wie viele verschiedene Belegungen bezüglich S gibt es über D?

   c) Beantworte Fragen a und b für D' = {1, 2}.

   d) Gilt $\{(\forall x)Px\} \;_D\!\models\; (\forall x)Qx$? (logische Implikation relativ zu D)

   e) Gilt $_D\!\models\; (\forall x)Px \vee (\forall x){\sim}Px$? (gültig relativ zu D)
   Gilt $\models\; (\forall x)Px \vee (\forall x){\sim}Px$?
   Gilt $_D\!\models\; (\forall x)Px \vee {\sim}(\forall x)Px$?

   f) Gilt $Pa \;_D\!\models\; Pb$?

2. Pu : u ist Junggeselle

   Qu : u ist verheiratet

   a) Ist $(\exists x)[Px \,\&\, Qx]$ erfüllbar ?

   b) Gilt $\models (\forall y)[Py \supset {\sim}Qy]$? Zeige!

3. a) Zeige, dass $\models (\exists y)(\forall x)Sxy \supset (\forall x)(\exists y)Sxy$. (Hinweis: $V^{d}/_{u}{}^{e}/_{v} = V^{e}/_{v}{}^{d}/_{u}$)
   b) Zeige, dass $\not\models (\forall x)(\exists y)Sxy \supset (\exists y)(\forall x)Sxy$. (D.h. gib eine Interpretation an, unter der die Formel falsch ist.)

4. Finde ein minimales Modell von der Formelmenge $\{(\exists y)Py, (\forall x)[{\sim}x = a \supset Px]\}$.
   (Nimm eine entsprechende (minimale) Morphologie an.)

Mathematische Grundlagen der Computerlinguistik I

10. Übungsblatt (Natürliches Schliessen in der Prädikatenlogik 1. Stufe)

Zeige, durch Konstruktion einer Derivation in $S_{PL1=}$, dass folgende Aussagen wahr sind.

Zunächst einige Aufgaben, die "hypothetische" Derivationen (Ableitungen) verlangen.

1. $(\forall x)[Px \,\&\, Qx] \vdash (\forall x)Px \,\&\, (\forall x)Qx$
2. $(\forall x)Px \,\&\, (\forall x)Qx \vdash (\forall x)[Px \,\&\, Qx]$
3. $(\forall x)(\forall y)Pxy \vdash (\forall y)(\forall x)Pxy$
4. $(\exists x)(\forall y)Pxy \vdash (\forall y)(\exists x)Pxy$
5. $(\forall x){\sim}Px \vdash (\exists x)[Px \supset Qx]$
6. $(\exists x)(\forall y)[Px \supset Qy] \vdash (\forall x)Px \supset (\forall y)Qy$
7. $(\forall x)Px \supset (\forall y)Qy \vdash (\exists x)(\forall y)[Px \supset Qy]$
8. $(\forall x)(\exists y)[Px \supset Qy] \vdash (\exists x)Px \supset (\exists y)Qy$
9. $(\exists x)[Px \vee Qx] \vdash (\exists x)Px \vee (\exists x)Qx$
10. $(\exists x)Px \vee (\exists x)Qx \vdash (\exists x)[Px \vee Qx]$
11. $(\forall x)[Px \vee Qx] \vdash (\forall x)Px \vee (\exists x)Qx$
12. $Pa \vdash (\exists x)[x=a \,\&\, Px]$
13. $(\forall x)[Px \equiv x=a] \vdash Pa$
14. $(\forall x)Px \vdash (\exists x)[Px \,\&\, (Qx \supset (\forall x)Qx)]$
15. $(\exists x)[Px \,\&\, Qx] \vdash (\exists x)Px \,\&\, (\exists x)Qx$

Für die folgenden Aufgaben muss man "kategorische" Derivationen (Beweise) in $S_{PL1=}$ konstruieren.

16. $\vdash {\sim}(\exists x)Px \supset (\forall x)[Px \supset Qx]$
17. $\vdash (\forall x)Px \vee (\exists x){\sim}Px$
18. $\vdash (\forall x)[Px \equiv (\exists y)[x=y \,\&\, Py]]$
19. $\vdash Pa \equiv (\forall x)[x=a \supset Px]$
20. $\vdash (\forall x)(\exists y)Pxy \vee (\exists x)(\forall y){\sim}Pxy$