Lösungen für die Aufgaben der Probeklausur (Einführung in die Semantik)

<u>Aufg.1</u>
Lpt-Formeln

<u>Aufg. 1 (a)</u> Wahrheitsbedingungen relativ zu Modell M, Zeitpunkt t und Belegung h:

(i) $\llbracket \mathbf{FH}\forall x(F(x) \rightarrow G(x))\rrbracket_{M,t,h} = 1$
gdw es gibt ein t': t < t' und $\llbracket \mathbf{H}\forall x(F(x) \rightarrow G(x))\rrbracket_{M,t',h} = 1$

gdw es gibt ein t': t < t' und für alle t'' mit t'' < t' gilt:
$\llbracket \forall x(F(x) \rightarrow G(x))\rrbracket_{M,t'',h} = 1$

gdw es gibt ein t': t < t' und für alle t'' mit t'' < t' gilt:
für alle d ∈ U gilt: $\llbracket (F(x) \rightarrow G(x))\rrbracket_{M,t'',h^{d/x}} = 1$

gdw es gibt ein t': t < t' und für alle t'' mit t'' < t' gilt:
für alle d ∈ U gilt:
entweder $\llbracket F(x)\rrbracket_{M,t'',h^{d/x}} = 0$
oder $\llbracket G(x)\rrbracket_{M,t'',h^{d/x}} = 1$

gdw es gibt ein t': t < t' und für alle t'' mit t'' < t' gilt:
für alle d ∈ U gilt:
entweder $\llbracket x\rrbracket_{M,t'',h^{d/x}} \notin \llbracket F\rrbracket_{M,t'',h^{d/x}}$
oder $\llbracket x\rrbracket_{M,t'',h^{d/x}} \in \llbracket G\rrbracket_{M,t'',h^{d/x}}$

gdw es gibt ein t': t < t' und für alle t'' mit t'' < t' gilt:
für alle d ∈ U gilt:
entweder $\llbracket x\rrbracket_{M,t'',h^{d/x}} \notin \llbracket F\rrbracket_{M,t'',h^{d/x}}$
oder $\llbracket x\rrbracket_{M,t'',h^{d/x}} \in \llbracket G\rrbracket_{M,t'',h^{d/x}}$

gdw es gibt ein t': t < t' und für alle t'' mit t'' < t' gilt:
für alle d ∈ U gilt:
entweder $h^{d/x}(x) \notin V(F)(t'')$
oder $h^{d/x}(x) \in V(G)(t'')$

gdw

es gibt ein t': t < t' und für alle t'' mit t'' < t' gilt: für alle d ∈ U gilt: entweder d ∉ V(F)(t'') oder d ∈ V(G)(t'')

(ii) $\llbracket \mathbf{P}\neg\mathbf{F}\exists x(F(x) \wedge G(x))\rrbracket_{M,t,h} = 1$

gdw es gibt ein t': t' < t mit $\llbracket \neg\mathbf{F}\exists x(F(x) \wedge G(x))\rrbracket_{M,t',h} = 1$

gdw es gibt ein t': t' < t so dass es kein t'' gibt mit t' < t'' und $\llbracket \exists x(F(x) \wedge G(x))\rrbracket_{M,t'',h} = 1$

gdw es gibt ein t': t' < t so dass es kein t'' gibt mit t' < t'' und es gibt ein d ∈ U mit $\llbracket F(x) \wedge G(x)\rrbracket_{M,t'',h^{d/x}} = 1$

gdw es gibt ein t': t' < t so dass es kein t'' gibt mit t' < t'' und es gibt ein d ∈ U mit
$\llbracket F(x)\rrbracket_{M,t'',h^{d/x}} = 1$ und $\llbracket G(x)\rrbracket_{M,t'',h^{d/x}} = 1$

gdw es gibt ein t': t' < t so dass es kein t'' gibt mit t' < t'' und es gibt ein d ∈ U mit
$\llbracket x\rrbracket_{M,t'',h^{d/x}} \in \llbracket F\rrbracket_{M,t'',h^{d/x}}$ und
$\llbracket x\rrbracket_{M,t'',h^{d/x}} \in \llbracket G\rrbracket_{M,t'',h^{d/x}}$

gdw es gibt ein t': t' < t so dass es kein t'' gibt mit t' < t'' und es gibt ein d ∈ U mit
$h^{d/x}(x) \in V(F)(t'')$ und
$h^{d/x}(x) \in V(G)(t'')$

gdw

es gibt ein t': t' < t so dass es kein t'' gibt mit t' < t'' und es gibt ein d ∈ U mit d ∈ V(F)(t'') und d ∈ V(G)(t'')

(iii) $\llbracket \forall x(F(x) \vee G(x))\rrbracket_{M,t,h} = 1$

gdw für alle d ∈ U gilt $\llbracket F(x) \vee G(x)\rrbracket_{M,t,h^{d/x}} = 1$

gdw für alle d ∈ U gilt
entweder $\llbracket F(x)\rrbracket_{M,t,h^{d/x}} = 1$
oder $\llbracket G(x)\rrbracket_{M,t,h^{d/x}} = 1$

gdw für alle d ∈ U gilt
entweder $h^{d/x}(x) \in V(F)(t)$
oder $h^{d/x}(x) \in V(G)(t)$
gdw

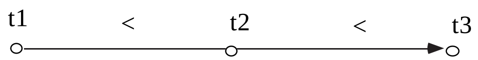
für alle d ∈ U gilt entweder d ∈ V(F)(t) und oder d ∈ V(G)(t)

<u>Aufg. 1 (b)</u>

Zeige, dass
$\{\mathbf{FH}\forall x(F(x) \rightarrow G(x)), \mathbf{P}\neg\mathbf{F}\exists x(F(x) \wedge G(x)), \forall x(F(x) \vee G(x))\}$ konsistent (simultan erfüllbar) ist.

Folgende Modellstruktur zeigt dies:

M = <U, T, <, V> T = {t1, t2, t3} U = {1}



V(F)(t1) = ∅
V(G)(t1) = {1}

V(F)(t2) = ∅
V(G)(t2) = {1}

V(F)(t3) = ∅
V(G)(t3) = {1}

Die Formelmenge ist z.B. am Zeitpunkt t2 in M simultan erfüllt

<u>Aufg. 2</u>

Eigenschaften der Modellstrukturen für folgende Lpt-Formeln.
(i) $\mathbf{FG}(p \wedge \neg p)$
(ii) $\mathbf{F}(\mathbf{G}p \wedge \mathbf{G}\neg p)$

zu **(i)**:

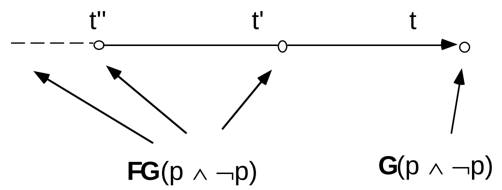
Zunächst einmal gilt: die Formel $p \wedge \neg p$ ist eine Kontradiktion und daher an keinem Zeitpunkt wahr!

$[\![\mathbf{G}(p \wedge \neg p)]\!]_{M,t,h} = 1$ gdw für alle $t' \in T$:
wenn $t' > t$, dann $[\![p \wedge \neg p]\!]_{M,t',h} = 1$

Da das Konsequent des Konditionals in der Wahrheitsbedingung nie wahr sein kann, kann die gesamte Wahrheitsbedingung nur erfüllt sein, wenn das Antezedent (t' > t) immer falsch ist, d.h. wenn es kein t' nach t gibt, d.h. wenn t der letzte Zeitpunkt von <T, < > ist.

$\mathbf{G}(p \wedge \neg p)$ kann also nur am letzten Zeitpunkt einer Zeitstruktur wahr sein, d.h. <T, < > muss einen Endpunkt haben.

$\mathbf{FG}(p \wedge \neg p)$ ist dann an allen ausser dem letzten Zeitpunkt einer endenden Zeitstruktur wahr. (T muss mindestens zwei Zeitpunkte enthalten.)



Zu (ii) $\mathbf{F}(\mathbf{G}p \wedge \mathbf{G}\neg p)$

Sowohl $\mathbf{G}p$ als auch $\mathbf{G}\neg p$ können nur am letzten Zeitpunkt einer endenden Zeitstuktur wahr sein.

Also ist $\mathbf{F}(\mathbf{G}p \wedge \mathbf{G}\neg p)$ an jedem ausser dem letzten Zeitpunkt einer endenden Zeitstruktur wahr. (T muss mindestens zwei Elemente haben.)

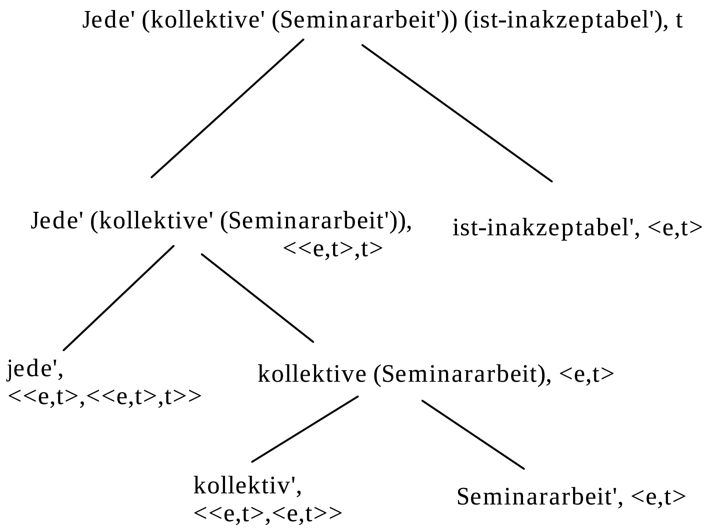
Aufg. 3

Jede kollektive Seminararbeit ist inakzeptabel.

Aufg. 3 (a) Übersetze in Prädikatenlogik 1. Stufe:

$\forall x[(\text{kollektiv}'(x) \wedge \text{Seminararbeit}'(x)) \rightarrow \text{inakzeptabel}(x)]$

Aufg.3 (b) Übersetze in extens. Typtheorie mit "Typenbaum"



Aufg. 3 (c) Gib komplexe Lexikoneinträge für Wörter an:

jede' $\Rightarrow$ $\lambda P\lambda Q[\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))]$

kollektiv' $\Rightarrow$ $\lambda P\lambda x[\exists y\exists z(\neg y = z \wedge (\text{Pers}(y) \wedge \text{Pers}(z) \wedge P(x) \wedge \text{beitr}(y,x) \wedge \text{beitr}(z,x))]$

Seminararbeit' $\Rightarrow$ $\lambda x[\exists y(\text{Seminar}'(y) \wedge \text{Arbeit}'(x) \wedge \text{Teil-von}'(x,y))]$

inakzeptabel' $\Rightarrow$ $\lambda x\neg\Diamond\exists y(\text{Pers}(y) \wedge \text{akzeptieren}'(y,x))$

Aufg. 3 (d) Typtheoretische Übersetzung des Satzes mit Hilfe obiger Lexikoneinträge, dann Reduktion soweit wie möglich.

kollektiv'(Seminararbeit') $\Rightarrow$ $\lambda P\lambda x[\exists y\exists z(\neg y = z \wedge (\text{Pers}(y) \wedge \text{Pers}(z) \wedge P(x) \wedge \text{beitr}(y,x) \wedge \text{beitr}(z,x))](\lambda x[\exists y(\text{Seminar}'(y) \wedge \text{Arbeit}'(x) \wedge \text{Teil-von}'(x,y))])$

$\Rightarrow$ $\lambda x[\exists y\exists z(\neg y = z \wedge (\text{Pers}(y) \wedge \text{Pers}(z) \wedge \lambda x[\exists y(\text{Seminar}'(y) \wedge \text{Arbeit}'(x) \wedge \text{Teil-von}'(x,y))](x) \wedge \text{beitr}(y,x) \wedge \text{beitr}(z,x))]$

$\Rightarrow$ $\lambda x[\exists y\exists z(\neg y = z \wedge (\text{Pers}(y) \wedge \text{Pers}(z) \wedge \exists y(\text{Seminar}'(y) \wedge \text{Arbeit}'(x) \wedge \text{Teil-von}'(x,y)) \wedge \text{beitr}(y,x) \wedge \text{beitr}(z,x))]$

jede'(kollektiv'(Seminararbeit')) $\Rightarrow$ $\lambda P\lambda Q[\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))](\lambda x[\exists y\exists z(\neg y = z \wedge (\text{Pers}(y) \wedge \text{Pers}(z) \wedge \exists y(\text{Seminar}'(y) \wedge \text{Arbeit}'(x) \wedge \text{Teil-von}'(x,y)) \wedge \text{beitr}(y,x) \wedge \text{beitr}(z,x))])$

$\Rightarrow$ $\lambda Q[\forall x(\exists y\exists z(\neg y = z \wedge (\text{Pers}(y) \wedge \text{Pers}(z) \wedge \exists y(\text{Seminar}'(y) \wedge \text{Arbeit}'(x) \wedge \text{Teil-von}'(x,y)) \wedge \text{beitr}(y,x) \wedge \text{beitr}(z,x)) \rightarrow Q(x))]$

jede'(kollektiv'(Seminararbeit'))(inakzeptabel')

$\Rightarrow$ $\lambda Q[\forall x(\exists y\exists z(\neg y = z \wedge (\text{Pers}(y) \wedge \text{Pers}(z) \wedge \exists y(\text{Seminar}'(y) \wedge \text{Arbeit}'(x) \wedge \text{Teil-von}'(x,y)) \wedge \text{beitr}(y,x) \wedge \text{beitr}(z,x)) \rightarrow Q(x))](\lambda x\neg\Diamond\exists y(\text{Pers}(y) \wedge \text{akzeptieren}'(y,x)))$

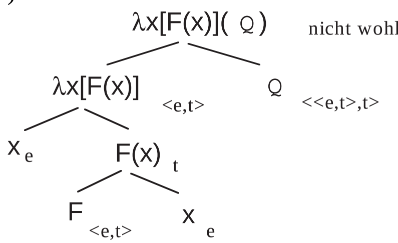
$\Rightarrow$ $\forall x(\exists y\exists z(\neg y = z \wedge (\text{Pers}(y) \wedge \text{Pers}(z) \wedge \exists y(\text{Seminar}'(y) \wedge \text{Arbeit}'(x) \wedge \text{Teil-von}'(x,y)) \wedge \text{beitr}(y,x) \wedge \text{beitr}(z,x)) \rightarrow \lambda x\neg\Diamond\exists y(\text{Pers}(y) \wedge \text{akzeptieren}'(y,x))(x))$

$\Rightarrow$ $\forall x(\exists y\exists z(\neg y = z \wedge (\text{Pers}(y) \wedge \text{Pers}(z) \wedge \exists y(\text{Seminar}'(y) \wedge \text{Arbeit}'(x) \wedge \text{Teil-von}'(x,y)) \wedge \text{beitr}(y,x) \wedge \text{beitr}(z,x)) \rightarrow \neg\Diamond\exists y(\text{Pers}(y) \wedge \text{akzeptieren}'(y,x)))$

Aufg.4 Formeln von L$_{\lambda MT}$

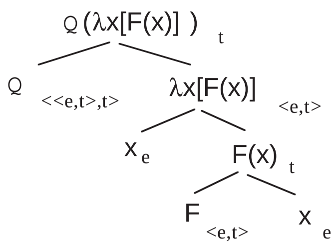
(a) Typenbäume
(b) Reduzierungen, falls möglich

(i) (a)



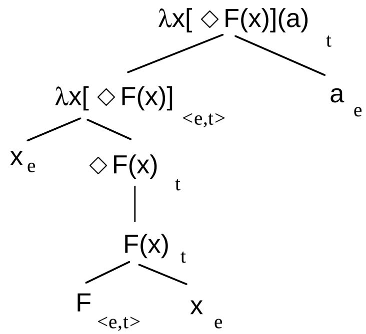
nicht wohlgeformt

(ii) (a)



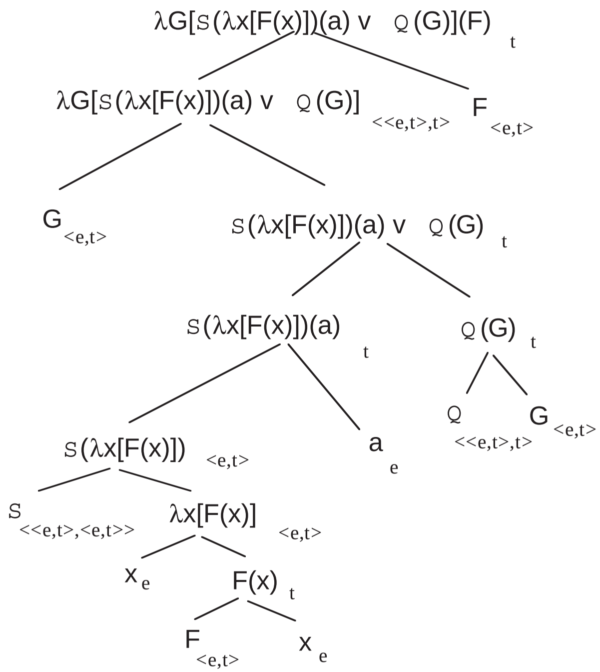
(b) $Q(F)$

(iii) (a)



(b) kann nicht weiter reduziert werden, da a kein ICE ist und x in $\diamond F(x)$ im Skopus eines intensionalen Operators ist

(iv) (a)



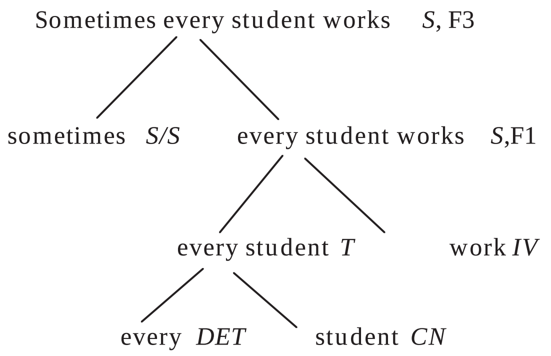
(b) $\Rightarrow$ $S(\lambda x[F(x)])(a) \vee Q(F)$ $\Rightarrow$ $S(F)(a) \vee Q(F)$

Aufg.5 Analysiere im Montage-Fragment den Satz

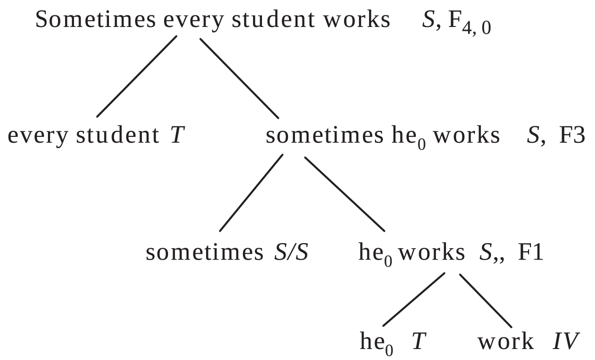
Sometimes every student works

Aufg.5 (a)

1. Lesart:



2. Lesart:



Aufg. 5 (b) Übersetze die zwei Lesarten des engl. Satzes in IL und reduziere so weit wie möglich.

every $\Rightarrow$ $\lambda F \lambda G[\forall x({}^{\vee}F(x) \rightarrow {}^{\vee}G(x))]$
student $\Rightarrow$ **student'**
work $\Rightarrow$ **work'**
sometimes $\Rightarrow$ $\lambda p[\mathbf{P}{}^{\vee}p \vee \mathbf{F}{}^{\vee}p \vee {}^{\vee}p]$

1. Lesart (de dicto):

every student $\Rightarrow$ $\lambda F \lambda G[\forall x({}^{\vee}F(x) \rightarrow {}^{\vee}G(x))]({}^{\wedge}\text{student}')$
$\Rightarrow$ $\lambda G[\forall x({}^{\vee\wedge}\text{student}'(x) \rightarrow {}^{\vee}G(x))]$
$\Rightarrow$ $\lambda G[\forall x(\text{student}'(x) \rightarrow {}^{\vee}G(x))]$
every student works $\Rightarrow$ $\lambda G[\forall x(\text{student}'(x) \rightarrow {}^{\vee}G(x))]({}^{\wedge}\text{work}')$
$\Rightarrow$ $\lambda G[\forall x(\text{student}'(x) \rightarrow {}^{\vee\wedge}\text{work}'(x))]$
$\Rightarrow$ $\forall x(\text{student}'(x) \rightarrow \text{work}'(x))$

sometimes every student works $\Rightarrow$ $\lambda p[\mathbf{P}{}^{\vee}p \vee \mathbf{F}{}^{\vee}p \vee {}^{\vee}p]({}^{\wedge}\forall x(\text{student}'(x) \rightarrow \text{work}'(x)))$

$\Rightarrow$ $\mathbf{P}{}^{\vee\wedge}\forall x(\text{student}'(x) \rightarrow \text{work}'(x)) \vee \mathbf{F}{}^{\vee\wedge}\forall x(\text{student}'(x) \rightarrow \text{work}'(x)) \vee {}^{\vee\wedge}\forall x(\text{student}'(x) \rightarrow \text{work}'(x))$

$\Rightarrow$ $\mathbf{P}\forall x(\text{student}'(x) \rightarrow \text{work}'(x)) \vee \mathbf{F}\forall x(\text{student}'(x) \rightarrow \text{work}'(x)) \vee \forall x(\text{student}'(x) \rightarrow \text{work}'(x))$

2. Lesart (de re):

he_0 $\Rightarrow$ $\lambda F[{}^{\vee}F(x_0)]$

he_0 works $\Rightarrow$ $\lambda F[{}^{\vee}F(x_0)]({}^{\wedge}\text{work}')$ $\Rightarrow$ ${}^{\vee\wedge}\text{work}'(x_0)$ $\Rightarrow$ $\text{work}'(x_0)$

sometimes he_0 works $\Rightarrow$ $\lambda p[\mathbf{P}{}^{\vee}p \vee \mathbf{F}{}^{\vee}p \vee {}^{\vee}p]({}^{\wedge}\text{work}'(x_0))$
$\Rightarrow$ $\mathbf{P}{}^{\vee\wedge}\text{work}'(x_0) \vee \mathbf{F}{}^{\vee\wedge}\text{work}'(x_0) \vee {}^{\vee\wedge}\text{work}'(x_0)$
$\Rightarrow$ $\mathbf{P}\text{work}'(x_0) \vee \mathbf{F}\text{work}'(x_0) \vee \text{work}'(x_0)$

sometimes every student works $\Rightarrow$ $\lambda G[\forall x(\text{student}'(x) \rightarrow {}^{\vee}G(x))]({}^{\wedge}\lambda x_0[\mathbf{P}\text{work}'(x_0) \vee \mathbf{F}\text{work}'(x_0) \vee \text{work}'(x_0)])$

$\Rightarrow$ $\forall x(\text{student}'(x) \rightarrow {}^{\vee\wedge}\lambda x_0[\mathbf{P}\text{work}'(x_0) \vee \mathbf{F}\text{work}'(x_0) \vee \text{work}'(x_0)](x))$

$\Rightarrow$ $\forall x(\text{student}'(x) \rightarrow \lambda x_0[\mathbf{P}\text{work}'(x_0) \vee \mathbf{F}\text{work}'(x_0) \vee \text{work}'(x_0)](x))$

$\Rightarrow$ $\forall x(\text{student}'(x) \rightarrow [\mathbf{P}\text{work}'(x) \vee \mathbf{F}\text{work}'(x) \vee \text{work}'(x)])$