2

Werner Saurer WS

Vorlesung: Einführung in die Semantik

Übungsblatt 1

1.1 Gib für die folgenden deutschen Sätze geeignete Übersetzungen in die Prädikatenlogik 1. Stufe an!

(a) Wer rastet, der rostet.
(b) Peter hat einen roten Sportwagen.
(c) Wenn jemand gearbeitet hat, ist Peter zufrieden.
(d) Wenn jemand gearbeitet hat, dann lobt ihn Peter.
(e) Wenn jemand gearbeitet hat, dann war es Peter.
(f) Jeder ist sich selbst der Nächste.
(g) Niemand wird die Wahl gewinnen, wenn jeder etwas gegen ihn hat.

1.2 Gib für die folgenden Formeln (Aussagen) der Prädikatenlogik 1. Stufe geeignete Übersetzungen ins Deutsche an!

Übersetze dabei a als "Anna", d als "Doris", F als "Studentin", G als "reich", R als "verwandt mit" und Q als "älter als".

(a) $Fd \vee Ga$

(b) $\forall x (Fx \vee Gx)$

(c) $\forall x \forall y (Rxy \leftrightarrow Ryx)$

(d) $\exists x (\neg Fx \wedge \forall y (\neg x=y \rightarrow Fy))$

(e) $\exists x\, Gx \vee \exists x\, \neg Gx$

(f) $\forall x (Fx \rightarrow \exists y (Gy \wedge Rxy))$

(g) $\exists x \neg(Fx \rightarrow Fx \wedge Gx)$

(h) $\forall x \exists y\, Qxy$

(i) $\exists y \forall x\, Qxy$

(k) $\forall x \forall y\, Qxy$

(l) $\exists x \exists y (Rxy \rightarrow Ryx)$

Werner Saurer Wintersemester

Vorlesung: Einführung in die Semantik

Übungsblatt 1 - Musterlösungen einiger Aufgaben

1.1 Gib für die folgenden deutschen Sätze geeignete Übersetzungen in die Prädikatenlogik 1. Stufe an!

(a) *Wer rastet, der rostet.*

i) **Fx** := x rastet
Gx := x rostet $\quad \forall x\, (\mathbf{Fx} \rightarrow \mathbf{Gx})$

(b) *Peter hat einen roten Sportwagen.*

a : Peter
Pxy : x hat y (x besitzt y)
Fx : x ist ein Sportwagen
Gx : x ist rot

$\exists x ((Fx \wedge Gx) \wedge Pax)$

(c) *Wenn jemand gearbeitet hat, ist Peter zufrieden.*

a : Peter
Fx : x arbeitet
Gx : x ist zufrieden
Pxy : x lobt y

U (Universum): die Menge aller Personen

$\exists x\, Fx \rightarrow Ga$ oder
$\forall x\, (Fx \rightarrow Ga)$ (die beiden sind äquivalent)

(d) *Wenn jemand gearbeitet hat, dann lobt ihn Peter.*

Gleiches Wörterbuch und Universum.
$\forall x\, (Fx \rightarrow Pax)$
Vorsicht: $\exists x\, Fx \rightarrow Pax$ geht hier nicht, da keine Aussage!

(e) *Wenn jemand gearbeitet hat, dann war es Peter.*
$\forall x\, (Fx \rightarrow x=a)$
auch hier geht $\exists x\, Fx \rightarrow x=a$ nicht, da keine Aussage

(f) *Jeder ist sich selbst der Nächste.*

i) **Px** := x ist sich selbst der nächste $\quad \forall x\, \mathbf{Px}$
ii) **Pxy** := x ist y am nächsten $\quad \forall x\, \mathbf{Pxx}$

Dies schliesst allerdings nicht aus, dass es auch noch andere Individuen gibt, die mir "am nächsten" sind (was ja nicht sein kann). Deshalb besser:

$$\forall x \forall y\, [\mathbf{Pxy} \leftrightarrow x=y]$$

iii) **Pxyz** := x ist (zu) y näher als z (im Sinne von : die "Entfernung" von y zu x ist kleiner als die "Entfernung" von y zu z):

$$\forall x \neg\exists y\, [\mathbf{Pyxx} \wedge \neg x=y]$$

(Kein von x verschiedenes y ist so, dass die Entfernung von y zu x kleiner ist als die Entfernung von x zu sich selbst.)

Die letzten beiden Formalisierungen haben den Vorteil, dass aus ihnen direkt gefolgert werden kann: *Es gibt niemand andern, der mir näher ist als ich selbst*: $\neg\exists y\, [\mathbf{Pyaa} \wedge \neg a=y]$ (wo **a** := *ich*)

(g) *Niemand wird die Wahl gewinnen, wenn jeder etwas gegen ihn hat.*

Fx := x wird die Wahl gewinnen
Pxy := x hat etwas gegen y (x lehnt y ab)

$\forall x\, (\forall y Pyx \rightarrow \neg Fx)$ oder $\forall x \exists y\, (Pyx \rightarrow \neg Fx)$ oder $\neg\exists x\, [\forall y Pyx \wedge Fx]$
(alle drei sind äquivalent)

1.2 Gib für die folgenden Formeln (Aussagen) der Prädikatenlogik 1. Stufe geeignete Übersetzungen ins Deutsche an!

Übersetze dabei a als "Anna", d als "Doris", F als "Studentin", G als "reich", R als "verwandt mit" und Q als "älter als".

(a) $Fd \vee Ga$	*Doris ist Studentin oder Anna ist reich.*
(b) $\forall x\, (Fx \vee Gx)$	*Alle sind entweder Studentinnen oder reich.*
(c) $\forall x \forall y\, (Rxy \leftrightarrow Ryx)$	*Für je zwei Personen gilt, dass die erste mit der zweiten verwandt ist genau dann wenn die zweite mit der ersten verwandt ist.*
oder etwas freier:	*Verwandtsein ist eine symmetrische Beziehung.*
(d) $\exists x\, (\neg Fx \wedge \forall y\, (\neg x=y \rightarrow Fy))$	*Es gibt jemand, der/die nicht Studentin ist, aber alle andern sind Studentinnen.*
	Alle ausser einer Person sind Studentinnen.
(e) $\exists x\, Gx \vee \exists x\, \neg Gx$	*Es gibt solche die reich sind oder solche die nicht reich sind.*
(f) $\forall x\, (Fx \rightarrow \exists y\, (Gy \wedge Rxy))$	*Alle Studentinnen sind mit jemand verwandt, der reich ist.*
	Alle Studentinnen haben einen reichen Verwandten.
(g) $\exists x\, \neg(Fx \rightarrow Fx \wedge Gx)$	*Es gibt jemand, für die nicht gilt, dass sie eine reiche Studentin ist, falls sie eine Studentin ist.*
oder etwas freier:	*Nicht alle Studentinnen sind reich(e Studentinnen)*
(h) $\forall x \exists y\, Qxy$	*Jeder ist älter als (irgend) jemand. Niemand ist der Jüngste.*

(i) $\exists y \forall x$ Qxy — *Es gibt jemand, so dass alle älter sind als er.*

besser: *Es gibt jemand, der jünger ist als alle. Jemand ist jünger als alle.*

dies bedeutet nicht: *Jemand ist der Jüngste.*

(k) $\forall x \forall y$ Qxy — *Jeder ist älter als jeder.*

(l) $\exists x \exists y$ (Rxy $\rightarrow$ Ryx) — *Es gibt zwei Personen, so dass die eine (die erste) mit der andern (der letzteren) verwandt ist, falls die andere (die letztere) mit der einen (der ersten) verwandt ist.*

Einführung in die Semantik

Übungsblatt 2

(Musterlösungen)

Werner Saurer

WS

Vorlesung: Einführung in die Semantik

Übungsblatt 2

2.1 Sei h eine Belegung mit:

x $\rightarrow$ a
y $\rightarrow$ b
z $\rightarrow$ c
u $\rightarrow$ d.

Welche Werte haben die folgenden modifizierten Belegungen für x,y,z,u ?

(a) h^a_x, (b) h^a_y, (c) $h^{h(z)}_y$, (d) $h^{b\ a}_{y\ u}$, (e) $(h^b_y)^c_y$, (f) $h^{a\ a\ a}_{x\ z\ u}$

2.2 Berechne die semantischen Werte der Aussagen (a) - k) aus 1.2 in der "Bundesländer - Modellstruktur"!

2.3 Welche Aussagen aus 1.2 sind gültig/erfüllbar/unerfüllbar in L_P? Begründe!

2.4 Gib für die erfüllbaren, aber in der "Bundesländer - Modellstruktur" falschen Aussagen von 1.2 ein Modell an !

Hinweis: Man kann die Ausgangsstruktur in geeigneter Weise modifizieren, oder ein völlig neues Modell spezifizieren.

2.5 Welche Folgerungsbeziehungen bestehen zwischen den Aussagen (h), (i) und (k) ? Begründe !

(1) 2.1 Varianten – Belegungen

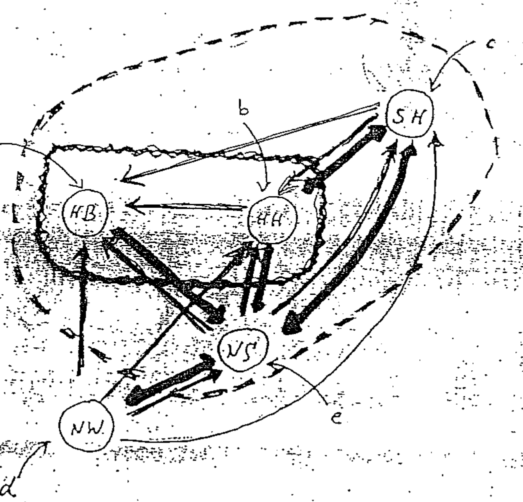
	x	y	z	u	...
h	a	b	c	d	...
h^a_x	a	b	c	d	...
h^a_y	a	a	c	d	
$h^{h(z)}_y$	a	c	c	d	
$h^{b\ a}_{y\ u}$	a	b	c	a	
$(h^b_y)^c_y$	a	c	c	d	
$h^{a\ a\ a}_{x\ z\ u}$	a	b	a	a	

<u>Merke:</u> wenn $x \neq y$, dann $h^{d\ e}_{x\ y} = h^{e\ d}_{y\ x}$

(d.h. wenn x und y verschiedene Variablen sind)

4

BUNDESLÄNDER - Modellstruktur



$\underline{F}$ ≙ Stadtstaat

$\underline{G}$ ≙ Küstenland

$\underline{R}$ ≙ grenzt an

$\underline{Q}$ ≙ ist größer als
(hat ~~mehr~~ Einwohner)

(5)

2.2 (a)

$[\![Fd \vee Ga]\!]^{M,h} = 1$ gdw

$[\![Fd]\!]^{M,h} = 1$ $\underline{\text{oder}}$ $[\![Ga]\!]^{M,h} = 1$ gdw

$[\![d]\!]^{M,h} \in [\![F]\!]^{M,h}$ oder $[\![a]\!]^{M,h} \in [\![G]\!]^{M,h} = 1$ gdw

$V(d) \in V(F)$ oder $V(a) \in V(G)$ gdw

$\boxed{NW \in \{HB, HH\} \quad \text{oder} \quad HB \in \{HB, HH, NS, SH\}}$

$\Uparrow$

diese Wahrheitsbedingung ist erfüllt,
da $HB \in \{HB, HH, NS, SH\}$;

also ist die Formel $Fd \vee Ga$ wahr
relativ zum Modell M (Bundesländermodell)

(6)

2.2 (b)

$[\![\forall x\, (Fx \vee Gx)]\!]^{M,h} = 1$

gdw für alle $d \in U$ gilt: $[\![Fx \vee Gx]\!]^{M,h^d_x} = 1$

gdw für alle $d \in U$: $[\![Fx]\!]^{M,h^d_x} = 1$ oder $[\![Gx]\!]^{M,h^d_x} = 1$

gdw für alle $d \in U$: $[\![x]\!]^{M,h^d_x} \in [\![F]\!]^{M,h^d_x}$ oder $[\![x]\!]^{M,h^d_x} \in [\![G]\!]^{M,h^d_x}$

gdw für alle $d \in U$: $h^d_x(x) \in V(F)$ oder $h^d_x(x) \in V(G)$

gdw $\boxed{\text{für alle } d \in U \text{ gilt: } d \in \{HB, HH\} \text{ oder } d \in \{HB, HH, NS, SH\}}$

$\Uparrow$

diese Wahrheitsbedingung ist $\underline{\text{nicht}}$ erfüllt,
da $\underline{\text{nicht}}$ für alle $d \in U$ gilt:
$d \in \{HB, HH\}$ oder $d \in \{HB, HH, NS, SH\}$!

Nämlich $NW \notin \{HB, HH\}$ und $NW \notin \{HB, HH, NS, SH\}$!

Also ist die Formel $\forall x\, [Fx \vee Gx]$ falsch
relativ zum Bundesländer - Modell M.

(

2.2 (c)

$[\![\forall x \forall y\, [Rxy \leftrightarrow Ryx]]\!]^{M,h} = 1$

gdw für alle $d \in U$: $[\![\forall y\, [Rxy \leftrightarrow Ryx]]\!]^{M,h^d_x} = 1$

gdw für alle $d \in U$, und für alle $e \in U$ gilt:
$[\![Rxy \leftrightarrow Ryx]\!]^{M,h^{de}_{xy}} = 1$

gdw für alle $d, e \in U$ gilt:
$[\![Rxy]\!]^{M,h^{de}_{xy}} = [\![Ryx]\!]^{M,h^{de}_{xy}}$

gdw $\langle [\![x]\!]^{M,h^{de}_{xy}}, [\![y]\!]^{M,h^{de}_{xy}} \rangle \in [\![R]\!]^{M,h^{de}_{xy}}$ gdw $\langle [\![y]\!]^{M,h^{de}_{xy}}, [\![x]\!]^{M,h^{de}_{xy}} \rangle \in [\![R]\!]^{M,h^{de}_{xy}}$

gdw $\langle h^{de}_{xy}(x), h^{de}_{xy}(y) \rangle \in V(R)$ gdw $\langle h^{de}_{xy}(y), h^{de}_{xy}(x) \rangle \in V(R)$

gdw $\boxed{\langle d, e \rangle \in V(R) \text{ gdw } \langle e, d \rangle \in V(R)}$

$\Uparrow$

diese Bedingung ist erfüllt, da
V(R) - die ~~G~~ "Grenzt-an"- Relation - symmetrisch
ist (siehe Doppelpfeile auf der Graphik !)

Also ist die Formel $\forall x \forall y\, [Rxy \leftrightarrow Ryx]$ wahr rel. zu M.

2.2 (d) $[\![\exists x [\neg Fx \wedge \forall y(\neg x{=}y \rightarrow Fy)]]\!]^{M,h} = 1$ gdw

es gibt ein $d \in U$ so dass: $[\![\neg Fx \wedge \forall y(\neg x{=}y \rightarrow Fy)]\!]^{M,h^d_x} = 1$ gdw

— " — : $[\![\neg Fx]\!]^{M,h^d_x} = 1$ und $[\![\forall y(\neg x{=}y \rightarrow Fy)]\!]^{M,h^d_x} = 1$ gdw

— " — : $[\![Fx]\!]^{M,h^d_x} = 0$ und für alle $e \in U$: $[\![\neg x{=}y \rightarrow Fy]\!]^{M,h^{de}_{xy}} = 1$ gdw

— " — : $[\![x]\!]^{M,h^d_x} \notin [\![F]\!]^{M,h^d_x}$ und für alle $e \in U$: $[\![\neg x{=}y]\!]^{M,h^{de}_{xy}} = 0$ oder $[\![Fy]\!]^{M,h^{de}_{xy}} = 1$ gdw

— " — : $h^d_x(x) \notin V(F)$ und für alle $e \in U$: $[\![x{=}y]\!]^{M,h^{de}_{xy}} = 1$ oder $[\![Fy]\!]^{M,h^{de}_{xy}} = 1$ gdw

es gibt ein $d \in U$: $d \notin \{HB, HH\}$ und für alle $e \in U$: $h^{de}_{xy}(x) = h^{de}_{xy}(y)$ oder $h^{de}_{xy}(y) \in V(F)$ gdw

$\boxed{\text{es gibt ein } d \in U\text{: } d \notin \{HB, HH\} \text{ und für alle } e \in U\text{: } d = e \text{ oder } e \in \{HB, HH\}}$

Diese Bedingung ist in der Modellstruktur M nicht erfüllt.

Es gibt zwar ein Bundesland, das nicht in {HB, HH} (d.h. Stadtstaat) ist,
z.B. NS oder SH oder NW : aber nicht jedes von diesem Bundesland verschiedene Bundesland ist ein Stadtstaat.

Also ist die obige Aussage falsch in der Bundesländer-Modellstruktur.

2.2 (e)

$[\![\exists x Gx \vee \exists x \neg Gx]\!]^{M,h} = 1$

gdw $[\![\exists x Gx]\!]^{M,h} = 1$ oder $[\![\exists x \neg Gx]\!]^{M,h} = 1$

gdw es gibt $d \in U$: $[\![Gx]\!]^{M,h^d_x} = 1$ ~~oder~~ oder es gibt $d \in U$: $[\![\neg Gx]\!]^{M,h^d_x} = 1$

gdw es gibt ein $d \in U$: $[\![x]\!]^{M,h^d_x} \in [\![G]\!]^{M,h^d_x}$ oder es gibt ein $d \in U$: $[\![Gx]\!]^{M,h^d_x} = 0$ (d.h. $[\![x]\!]^{M,h^d_x} \notin [\![G]\!]^{M,h^d_x}$)

gdw es gibt ein $d \in U$: $h^d_x(x) \in V(G)$ oder es gibt ein $d \in U$: $h^d_x(x) \notin V(G)$

gdw $\boxed{\text{es gibt ein } d \in U\text{: } d \in \{HB, HH, NS, SH\} \text{ oder es gibt ein } d \in U\text{: } d \notin \{HB, HH, NS, SH\}}$

$\Uparrow$

diese Bedingung ist erfüllt, da z.B. die linke Hälfte erfüllt ist:
es gibt ein $d \in U$: $d \in \{HB, HH, NS, SH\}$
z.B. $HB \in \{HB, HH, NS, SH\}$

Also ist Formel wahr in M !!

2.2 (g)

$[\![\exists x \neg (Fx \rightarrow Fx \wedge Gx)]\!]^{M,h} = 1$

gdw es gibt ein $d \in U$, so dass $[\![\neg(Fx \rightarrow Fx \wedge Gx)]\!]^{M,h^d_x} = 1$

gdw es gibt ein $d \in U$ so dass $[\![Fx \rightarrow Fx \wedge Gx]\!]^{M,h^d_x} = 0$

gdw es gibt ein $d \in U$, so dass $[\![Fx]\!]^{M,h^d_x} = 1$, aber $[\![Fx \wedge Gx]\!]^{M,h^d_x} = 0$

gdw es gibt ein $d \in U$, so dass $[\![x]\!]^{M,h^d_x} \in [\![F]\!]^{M,h^d_x}$, aber $[\![Fx]\!]^{M,h^d_x} = 0$ oder $[\![Gx]\!]^{M,h^d_x} = 0$

gdw es gibt ein $d \in U$, so dass $h^d_x(x) \in V(F)$, aber $h^d_x(x) \notin V(F)$ oder $h^d_x(x) \notin V(G)$

gdw $\boxed{\text{es gibt ein } d \in U\text{, so dass } d \in \{HB, HH\}\text{, aber } d \notin \{HB, HH, NS, SH\}}$

$\Uparrow$

Diese Bedingung besagt: es gibt einen Stadtstaat, der nicht Küstenland ist!

Das ist falsch in unserem Bundesländer-Modell M !!

2.2 (i) $[\![\exists y \forall x Qxy]\!]^{M,h} = 1$ gdw

es gibt ein $d \in U$: $[\![\forall x Qxy]\!]^{M,h^d_y} = 1$ gdw

es gibt ein $d \in U$ so dass für alle $e \in U$ gilt: $[\![Qxy]\!]^{M,h^{de}_{yx}} = 1$

es gibt ein $d \in U$ so dass für alle $e \in U$: $\langle [\![x]\!]^{M,h^{de}_{yx}}, [\![y]\!]^{M,h^{de}_{yx}} \rangle \in [\![Q]\!]^{M,h^{de}_{yx}}$

es gibt ein $d \in U$ so dass für alle $e \in U$: $\langle h^{de}_{yx}(x), h^{de}_{yx}(y) \rangle \in V(Q)$ ga

$\boxed{\text{es gibt ein } d \in U \text{ so dass für alle } e \in U\text{: } \langle e, d \rangle \in V(Q)}$

vergleiche die Bundesländer-Modellst.

Diese Bedingung ist in der Bundesländer-Modellstruktur nicht erfüllt.
Das müsste ja ein Element sein, auf das alle Pfeile $\Rightarrow$, die von jedem Element ausgehen, enden.
Dies ist nicht der Fall !
(HB ist fast ein Kandidat, außer dass eben von HB selbst kein $\Rightarrow$ Pfeil ausgeht, der auf HB zeigt. Das könnte ja auch nicht sein, da HB nicht größer als es selbst ist !)

Die obige Aussage ist also falsch in der Bundesländer-Modellstruktur M.

2.2 (k) $[\![\forall x \forall y \, Qxy]\!]^{M,h} = 1$ gdw (12)

für alle $d \in U$ und für alle $e \in U$: $[\![Qxy]\!]^{M,h^{de}_{xy}} = 1$ gdw

für alle d und $e \in U$: $\langle [\![x]\!]^{M,h^{de}_{xy}}, [\![y]\!]^{M,h^{de}_{xy}} \rangle \in [\![Q]\!]^{M,h^{de}_{xy}}$ gdw

$\boxed{\text{für alle } d \text{ und } e \in U: \langle d, e \rangle \in V(Q)}$

Diese Bedingung ist in der Bundesländer-Modellstruktur nicht erfüllt. Es müsste ja sonst ein $\Rightarrow$ Pfeil von jedem Element auf jedes Element zeigen. Dies ist nicht der Fall; z.B. gibt es keinen $\Rightarrow$ Pfeil von NS nach NW.

Also ist die obige Aussage falsch in der Bundesländer-Modellstruktur M.

2.3) Die Aussagen 1.2(e) und 1.2(l) sind gültig. (13)

Begründung für 1.2(e) gültig:

$$\exists x \, Gx \vee \exists x \neg Gx$$

Sei $M = \langle U, V \rangle$ eine Modellstruktur für L_P.
Für $V(G)$ gibt es nur zwei Fälle zu betrachten:

1. $V(G) \neq \emptyset$ oder 2. $V(G) = \emptyset$

Im Fall 1 gibt es etwas, das die von G ausgedrückte Eigenschaft hat; also ist $\exists x \, Gx$ wahr in M.
Im Fall 2 gibt es etwas, das nicht die von G ausgedrückte Eigenschaft hat; also ist $\exists x \neg Gx$ wahr in M.
Einer dieser Disjunkte ist also immer wahr, also ist $\exists x \, Gx \vee \exists x \neg Gx$ wahr, in jeder Modellstruktur M.

2.3) (Fortsetzung) (14)

Begründung für die Gültigkeit von 1.2(l):

$$\exists x \exists y \, [Rxy \rightarrow Ryx]$$

Sei M ~~ei~~ $= \langle U, V \rangle$ eine beliebige Modellstruktur für L_P.
Für $V(R)$ gibt es nur zwei Fälle zu betrachten:

1. $V(R) \neq \emptyset$ oder 2. $V(R) = \emptyset$

Fall 1: Sei $V(R) \neq \emptyset$.
Dann gibt es ein Paar $\langle d, e \rangle$ mit $\langle d, e \rangle \in V(R)$ ($d, e \in U$)
Dann gilt: $[\![Rxy \rightarrow Ryx]\!]^{M,h^{ed}_{xy}} = 1$
(da diese Belegung das Konsequent, Ryx, wahr macht!)
Also $[\![\exists x \exists y \, [Rxy \rightarrow Ryx]]\!]^{M,h^{ed}_{xy}} = 1$

Fall 2: Sei $V(R) = \emptyset$ (d.h. R bezeichnet die leere Relation)
Dann ist für jede Wahl von $d, e \in U$
$[\![Rxy]\!]^{M,h^{de}_{xy}} = 0$ (d.h. das Antecedens des Konditionals $Rxy \rightarrow Ryx$ ist immer falsch, also ist der Konditional $Rxy \rightarrow Ryx$ immer wahr.
Also gibt es $d, e \in U$: $[\![Rxy \rightarrow Ryx]\!]^{M,h^{de}_{xy}} = 1$
Also $[\![\exists x \exists y \, [Rxy \rightarrow Ryx]]\!]^{M,h^{de}_{xy}} = 1$

Die Aussage 1.2(l) ist also wahr in jeder Modellstruktur M, also ist sie logisch gültig.

2.3 (Fortsetzung) (15)

Die erfüllbaren Aussagen in 1.2 sind:

- e und l sind erfüllbar, da gültig.
- a, c und f sind wahr in M (Bundesländer-Modellstruktur), also erfüllbar
- b, d, g, h, i, k sind zwar falsch in M, aber es gibt Modellstrukturen, die sie wahr machen (siehe Aufg. 2.4), also sind sie erfüllbar.

Keine der Aussagen in 1.2 ist also unerfüllbar.

16

2.4 Gib für die erfüllbaren, aber in der Bundesländer-Modellstruktur falschen Aussagen von 1.2 ein Modell an.

b) $\forall x\, [Fx \vee Gx]$ $M = \langle U, V \rangle$

"Alles ist F oder G" mit $U = \{1\}$

und

	F	G
V	$\{1\}$	egal

In dieser Modellstruktur hat jedes Individuum die von F ausgedrückte Eigenschaft, also ist jedes Individuum F oder G.

d) $\exists x\, [\neg F \wedge \forall y\, [\neg x = y \rightarrow Fy]]$

"Ausser einem Ding ist alles F"

$M = \langle U, V \rangle$

mit $U = \{1\}$

und

	F
V	$\emptyset$

In dieser Modellstruktur hat 1 nicht die Eigenschaft F, aber alles andere hat die Eigenschaft F (trivialerweise, es gibt ja gar kein anderes Individuum als **1**).

2.4 (Fortsetzung) 17

g) $\exists x\, \neg\, (Fx \rightarrow Fx \wedge Gx)$

dies ist ja äquivalent mit $\neg \forall x\, (Fx \rightarrow Fx \wedge Gx)$ und "bedeutet" also: "Nicht alle F-Dinge sind F und G".

$M = \langle U, M \rangle$ mit $U = \{1\}$

und

	F	G
V	$\{1\}$	$\emptyset$

Diese Aussage ist wahr in M, da z.B. das Individuum 1 nur die Eigenschaft F, aber nicht die Eigenschaft G hat.

h) $\forall x\, \exists y\, Qxy$

"Für alle Dinge x gibt es ein Ding y zu dem x in der Relation Q steht"

$M = \langle U, V \rangle$ mit $U = \{1\}$

und

	Q
V	$\{\langle 1,1 \rangle\}$

1 ist hier das einzige Objekt, und es gibt etwas, nämlich die 1 selbst, das zu 1 in der Relation Q steht.

2.4 (Fortsetzung) 18

i) $\exists y\, \forall x\, Qxy$

"Es gibt etwas zu dem alle Dinge x in der Relation Q stehen"

$M = \langle U, V \rangle$ mit ~~M~~ $U = \{1\}$

und

	Q
V	$\{\langle 1,1 \rangle\}$

In M gibt es also etwas, nämlich die 1, zu dem alle Dinge – und 1 ist ja das einzige Ding in M – in der Relation Q stehen.

k) $\forall x \forall y\, Qxy$

"Jedes Ding steht zu jedem Ding in der Relation Q"

Auch hier wieder: $M = \langle U, V \rangle$ mit $U = \{1\}$

und

	Q
V	$\{\langle 1,1 \rangle\}$

Da 1 das einzige Ding in M ist, steht jedes Ding zu jedem Ding in der Relation Q (denn $\{\langle 1,1 \rangle\}$ ist ja die Totalrelation über U).

19

2.5 Welche Folgerungsbeziehungen bestehen zwischen (h), (i) und (k)?

a) (k) $\models$ (h), (i)

b) (i) $\models$ (h)

Sonst gibt es keine logischen Relationen zwischen diesen Aussagen.

Beweis für a) (k) $\models$ (i)

1 Sei $[\![\forall x \forall y\, Qxy]\!]^{M,h} = 1$ Annahme

2 d.h. für alle $d, e \in U$: $[\![Qxy]\!]^{M,h^{de}_{xy}} = 1$

3 d.h. es gibt ein Ding $e \in U$, so dass für alle Dinge $u \in U$ gilt: $[\![Qxy]\!]^{M,h^{de}_{xy}} = 1$

Variantenbildung ist kommutativ wenn $x \neq y$

4 Dann gilt auch: es gibt ein Ding $e \in U$, so dass für alle Dinge $u \in U$ gilt $[\![Qxy]\!]^{M,h^{e\,d}_{y\,x}} = 1$

5 Damit gilt: es gibt ein Ding $e \in U$ so dass $[\![\forall x\, Qxy]\!]^{M,h^{e}_{y}} = 1$

6 Also $[\![\exists y\, \forall x\, Qxy]\!]^{M,h} = 1$

2.5 (Fortsetzung)

(20)

Beweis für b) (i) ⊨ (h)

$\exists y \forall x Qxy \models \forall x \exists y Qxy$

1 Sei $[\![\exists y \forall x Qxy]\!]^{M,h} = 1$ Annahme

2 Es gibt ein $d \in U$ so dass für alle $e \in U$ gilt: $[\![Qxy]\!]^{M,h^{de}_{yx}} = 1$

3 Dann gilt: für alle $e \in U$ gibt es ein $d \in U$ mit $[\![Qxy]\!]^{M,h^{de}_{yx}} = 1$

4 Wegen $h^{de}_{yx} = h^{ed}_{xy}$ gilt dann: für alle $e \in U$ gibt es ein $d \in U$ mit $[\![Qxy]\!]^{M,h^{ed}_{xy}} = 1$

5 Also: für alle $e \in U$ $[\![\exists y Qxy]\!]^{M,h^{e}_{x}} = 1$

6 Schliesslich: $[\![\forall x \exists y Qxy]\!]^{M,h} = 1$

Da M und h beliebig gewählt waren gilt:
Jede Modellstruktur M und Belegung h, die $\exists y \forall x Qxy$ wahr machen, machen auch $\forall x \exists y Qxy$ wahr,
D.h. $\exists y \forall x Qxy \models \forall x \exists y Qxy$

Zeitlogische Gesetze

(1) $G(A \to B) \to (GA \to GB)$
(2) $H(A \to B) \to (HA \to HB)$

(3) $A \to HFA$
(4) $A \to GPA$

(5) $PA \to GPA, A \to GPA$
(6) $FA \to HFA, A \to HFA$

Die Gesetze (1) - (6) gelten in jeder Zeitstruktur, sind also nicht abhängig von der Ordnung <.

(7) $PA \to H(PA \vee A \vee FA)$
(8) $FA \to G(PA \vee A \vee FA)$

(7) und (8) drücken die Linearität "rückwärts" und "vorwärts" von < aus.

(9) $PPA \to PA$
(10) $FFA \to FA$

(9) und (10) drücken die Transitivität von < aus.

(11) $PA \to PPA$
(12) $FA \to FFA$

(11) und (12) gelten nur, wenn < dicht ist, d.h. wenn <T,<> die Struktur der rationalen Zahlen hat (zwischen zwei verschiedenen Zeitpunkten liegt immer ein dritter).

(13) $\neg G(A \wedge \neg A)$
(14) $\neg H(A \wedge \neg A)$

(13) gilt für Zeitstrukturen ohne Ende; und (14) gilt für Zeitstrukturen ohne Anfang.

ebenso: $GA \to FA$
$HA \to PA$

Einführung in die Semantik

Übungsblatt 3

MUSTERLÖSUNGEN

Übungsblatt 3

3.1 Überführe mit Hilfe der in der Vorlesung vorgestellten Äquivalenzen jeweils (1) in (2).

1. $((A \vee (B \vee C)) \wedge (C \vee \neg A))$
2. $((B \wedge \neg A) \vee C$

1. $((A \vee (B \vee C)) \wedge (C \vee \neg A))$
2. $((A \vee B) \vee C) \wedge (\neg A \vee C))$ Assoz. + Kommut.
3. $((A \vee B) \wedge \neg A) \vee C$ Distrib.
4. $((A \wedge \neg A) \vee (B \wedge \neg A)) \vee C$ Distrib.
5. $(B \wedge \neg A) \vee C$ Falsum

1. $((A \vee \neg(B \wedge A)) \wedge (C \vee (D \vee C)))$
2. $C \vee D$

1. $((A \vee \neg(B \wedge A)) \wedge (C \vee (D \vee C))$
2. $((A \vee \neg(A \wedge B)) \wedge (C \vee (C \vee D))$ 2x Kommut.
3. $((A \vee (\neg A \vee \neg B)) \wedge ((C \vee C) \vee D)$ DeMorgan, Assoz.
4. $(((A \vee \neg A) \vee \neg B) \wedge (C \vee D)$ Assoz.; Idempotenz
5. $C \vee D$ Verum

(2)

3.2 Überführe die folgenden Formeln jeweils in konjunktive und disjunktive Normalform.

1. $(A \wedge \neg B) \vee ((B \vee \neg C) \wedge (C \vee A))$

1. $(A \wedge \neg B) \vee ((B \vee \neg C) \wedge ((C \vee A))$
2. $(A \wedge \neg B) \vee (((B \vee \neg C) \wedge C) \vee ((B \vee \neg C) \wedge A))$ Distrib.
3. $(A \wedge \neg B) \vee (B \wedge C) \vee (\neg C \wedge C) \vee (B \wedge A) \vee (\neg C \wedge A)$ Distrib.

DNF: 4. $(A \wedge \neg B) \vee (A \wedge B) \vee (B \wedge C) \vee (\neg C \wedge A)$ Falsum ; Kommut.

5. $(A \wedge (\neg B \vee B)) \vee (B \wedge C) \vee (A \wedge \neg C)$ Distrib. ; Kommut.

6. $A \vee (A \wedge \neg C) \vee (B \wedge C)$ Verum ; Kommut.

DNF (vereinfacht) 7. $A \vee (B \wedge \bar{C})$ Absorption

KNF 9. $(A \vee B) \wedge (A \vee C)$ Distr.

2. $\neg((A \vee B) \wedge (B \vee C) \wedge D \wedge E)$

1. $\neg((A \vee B) \wedge (B \vee C) \wedge D \wedge E)$
2. $\neg(A \vee B) \vee \neg(B \vee C) \vee \neg D \vee \neg E$ DeMorgan

DNF 3. $(\neg A \wedge \neg B) \vee (\neg B \wedge \neg C) \vee \neg D \vee \neg E$ DeMorgan

4. $(\neg A \wedge \neg B) \vee (\neg C \wedge \neg B) \vee \neg D \vee \neg E$ Kommutat.

5. $((\neg A \vee \neg C) \wedge \neg B) \vee (\neg D \vee \neg E)$ Distrib.

KNF 6. $((\neg A \vee \neg C \vee \neg D \vee \neg E) \wedge (\neg B \vee \neg D \vee \neg E)$ Distrib.

(3)

3.3 Überführe die folgenden Formeln in pränexe Normalform, den Körper der PNF-Formeln anschliessend in KNF-Formeln.

1. $\forall y(\neg \forall x P(x,y) \vee \forall x R(x,y)$

1. $\forall y(\neg \forall x\, P(x,y) \vee \forall x\, R(x,y))$
2. $\forall y(\neg \forall z\, P(z,y) \vee \forall x\, R(x,y))$ Umbenennung
3. $\forall y(\exists z \neg P(z,y) \vee \forall x\, R(x,y))$
4. $\forall y \exists z(\neg P(z,y) \vee \forall x\, R(x,y))$
5. $\forall y \exists z \forall x \underbrace{(\neg P(z,y) \vee R(x,y))}_{\text{dies ist schon in KNF}}$

2. $\forall x \exists y P(x,y) \leftrightarrow \exists x \forall y R(x,y)$

1. $\forall x \exists y\, P(x,y) \leftrightarrow \exists x \forall y\, R(x,y)$
2. $(\forall x \exists y\, P(x,y) \wedge \exists x \forall y\, R(x,y)) \vee (\neg \forall x \exists y\, P(x,y) \wedge \neg \exists x \forall y\, R(x,y))$
3. $(\forall x_1 \exists y_1\, P(x_1,y_1) \wedge \exists x_2 \forall y_2\, R(x_2,y_2)) \vee (\neg \forall x_3 \exists y_3\, P(x_3,y_3) \wedge \neg \exists x_4 \forall y_4\, R(x_4,y_4))$
4. $\forall x_1 \exists y_1 \exists x_2 \forall y_2 ((P(x_1,y_1) \wedge R(x_2,y_2)) \vee (\exists x_3 \forall y_3 \neg P(x_3,y_3) \wedge \forall x_4 \exists y_4 \neg R(x_4,y_4))$
5. $\forall x_1 \exists y_1 \exists x_2 \forall y_2 \exists x_3 \forall y_3 \forall x_4 \exists y_4 ((P(x_1,y_1) \wedge R(x_2,y_2)) \vee (\neg P(x_3,y_3) \wedge \neg R(x_4,y_4)$
6. —— " —— $((P(x_1,y_1) \vee \neg P(x_3,y_3)) \wedge (R(x_2,y_2) \vee \neg P(x_3,y_3))$ $\wedge (P(x_1,y_1) \vee \neg R(x_4,y_4)) \wedge (R(x_2,y_2) \vee \neg R(x_4,y_4)$

3.3 (4)

3. $\forall x \forall y \exists z((P(x,y) \wedge P(y,z)) \rightarrow \neg P(x,z))$

1. $\forall x \forall y \exists z(\neg(P(x,y) \wedge P(y,z)) \vee \neg P(x,z))$
2. $\forall x \forall y \exists z(\neg P(x,y) \vee \neg P(y,z) \vee \neg P(x,z))$

4. $\forall x(\exists y Q(x,y) \vee \forall y \exists z R(x,y,z))$

1. $\forall x(\exists y\, Q(x,y) \vee \forall y \exists z\, R(x,y,z))$
2. $\forall x(\exists u\, Q(x,u) \vee \forall y \exists z\, R(x,y,z))$ Umbenennung
3. $\forall x \exists u \forall y \exists z \underbrace{(Q(x,u) \vee R(x,y,z))}_{\text{schon in KNF}}$

3.3 (5)

5. $\forall x(\neg \forall y \neg \forall z(P(y,z) \vee \neg \exists y(\forall z Q(x,y,z) \rightarrow \neg P(x,y)))$

1. $\forall x(\neg \forall y \neg \forall z(P(y,z) \vee \neg \exists y(\forall z\, Q(x,y,z) \rightarrow \neg P(x,y)))$
2. $\forall x(\neg \forall u \neg \forall v(P(u,v) \vee \neg \exists y(\neg \forall z\, Q(x,y,z) \vee \neg P(x,y)))$ Umbenennung + $\rightarrow$ Beseitig.
3. $\forall x(\exists u \neg\neg \forall v(P(u,v) \vee \forall y \neg(\neg \forall z\, Q(x,y,z) \vee \neg P(x,y)))$
4. $\forall x(\exists u \forall v(P(u,v) \vee \forall y(\neg\neg \forall z\, Q(x,y,z) \wedge \neg\neg P(x,y)))$
5. $\forall x \exists u \forall v(P(u,v) \vee \forall y \forall z(Q(x,y,z) \wedge P(x,y)))$
6. $\forall x \exists u \forall v \forall y \forall z[P(u,v) \vee (Q(x,y,z) \wedge P(x,y))]$
7. $\forall x \exists u \forall v \forall y \forall z[(P(u,v) \vee Q(x,y,z) \wedge (P(u,v) \vee P(x,y))]$

6. $\exists x \exists y((on(x,y) \wedge \exists z\, on(y,z)) \rightarrow \neg \exists z\, puton(z,y))$

1. $\exists x \exists y((on(x,y) \wedge \exists z\, on(y,z)) \rightarrow \neg \exists z\, puton(z,y))$
2. $\exists x \exists y(\neg(on(x,y) \wedge \exists u\, on(y,u)) \vee \forall z \neg puton(z,y))$
3. $\exists x \exists y((\neg on(x,y) \vee \neg \exists u\, on(y,u)) \vee \forall z \neg puton(z,y))$
4. $\exists x \exists y((\neg on(x,y) \vee \forall u \neg on(y,u)) \vee \forall z \neg puton(z,y))$
5. $\exists x \exists y \forall u \forall z(\neg on(x,y) \vee \neg on(y,u) \vee \neg puton(z,y))$

Einf. in die Semantik

Musterlösungen

Übungsblatt 4

4.1. – ~~4.5~~ 4.6

~~[illegible]~~

(vollständig)

MUSTERLÖSUNGEN

Werner Saurer WS

Vorlesung: Einführung in die Semantik

Übungsblatt 4

4.1 Berechne für die Hans-Peter-Maria-Modellstruktur die Wahrheitswerte der folgenden Aussagen, und zwar für alle drei Zeitpunkte aus T!

(a) ∀x (schläft(x) → schläft(hans))

(b) ∀x (Fschläft(x) → Pschläft(x))

4.2 Die Formeln **FFA** → **FA** und **PPA** → **PA** sind gültig in L_{PT}. Zeige, daß die Umkehrungen der beiden Formeln nicht gültig sind! (z.B. durch Angabe einer geeigneten Modellstruktur)

4.3 (a) Zeige, daß die Formel **FPA** → **PA** ∨ A ∨ **FA** in L_{PT} gültig ist!

(b) Gilt die Umkehrung auch ? Begründung !

4.4 Zeige, daß (a) und (b) in L_{PT} äquivalent sind!

(a) FA & FB

(b) F(A&B) ∨ F(FA&B) ∨ F(A&FB)

4.5 Welche Folgerungs-/Äquivalenzbeziehungen bestehen zwischen den drei folgenden L_{PT}-Formeln?

(a) **P**∀x (Gx ∨ Hx)

(b) ∀x **P** (Gx ∨ Hx)

(c) ∀x (**P**Gx ∨ **P**Hx)

4.6 Wie kann die Definition der Modellstruktur für L_{PT} so eingeschränkt werden, daß (a), (b) und (c) gültig werden (die Umkehrungen der Implikationen in 4.2 und 4.3)?

(a) FA → FFA

(b) PA → PPA

(c) PA ∨ A ∨ FA → FPA

4.1 Berechne für die Hans-Peter-Maria-Modellstruktur die Wahrheitswerte der folgenden Aussagen, und zwar für alle drei Zeitpunkte aus T!

(a) ∀x (schläft(x) → schläft(hans))

(b) ∀x (Fschläft(x) → Pschläft(x))

①

$M = \langle U, T, <, V \rangle$, mit $U = \{H., P., M.\}$ und T: $t_1 \to t_2 \to t_3$

Zunächst werden die Wahrheitsbedingungen bestimmt

4.1) a) $\boxed{[\![\forall x [S(x) \to S(h)]]\!]^{M,t,h} = 1}$ gdw

für alle $d \in U$: $[\![S(x) \to S(h)]\!]^{M,t,h^d_x} = 1$ gdw

für alle $d \in U$: $[\![S(x)]\!]^{M,t,h^d_x} = 0$ oder $[\![S(h)]\!]^{M,t,h^d_x} = 1$ gdw

für alle $d \in U$: $[\![x]\!]^{M,t,h^d_x} \notin [\![S]\!]^{M,t,h^d_x}$ oder $[\![h]\!]^{M,t,h^d_x} \in [\![S]\!]^{M,t,h^d_x}$ gdw

für alle $d \in U$: $h^d_x(x) \notin V(S)(t)$ oder $V(h)(t) \in V(S)(t)$ gdw

$\boxed{\text{für alle } d \in U: \ d \notin V(S)(t) \text{ oder } V(h)(t) \in V(S)(t)}$

Jetzt bewerten wir die Formel an jedem Zeitpunkt $t \in T = \{t_1, t_2, t_3\}$ relativ zur Modellstruktur M und einer (beliebigen) Belegung h.

für t_1:

$H. \notin \{H., P., M.\}$? oder $\underline{H. \in \{H., P., M.\}}$ $d = H.$ ✓

$M. \notin \{H., P., M.\}$ oder $\underline{H. \in \{H., P., M.\}}$ $d = M.$ ✓

$P. \notin \{H., P., M.\}$ oder $\underline{H. \in \{H., P., M.\}}$ $d = P.$ ✓

also gilt es für alle $d \in U$. Damit ist die Formel an t_1 wahr.

für t_2:

$H. \notin \{H., M.\}$ oder $\underline{H. \in \{H., M.\}}$ $d = H.$ ✓

$M. \notin \{H., M.\}$ oder $\underline{H \in \{H., M.\}}$ $d = M.$ ✓

$\underline{P. \notin \{H., M.\}}$ oder $H \in \{H., M.\}$ $d = P.$ ✓

also gilt es für alle $d \in U$. Damit ist die Formel an t_2 wahr

für t_3:

$P \notin \{P\}$ falsch oder $H \in \{P\}$ auch falsch → gilt nicht für alle → Formel nicht wahr

$\underline{H. \notin \{P.\}}$ oder $H. \in \{P.\}$ $d = H.$ ✓

4.1 (b) $\boxed{[\![\forall x [\mathbb{F} S(x) \to \mathbb{P} S(x)]]\!]^{M,t,h} = 1}$ gdw

für alle $d \in U$: $[\![\mathbb{F} S(x) \to \mathbb{P} S(x)]\!]^{M,t,h^d_x} = 1$ gdw

für alle $d \in U$: $[\![\mathbb{F} S(x)]\!]^{M,t,h^d_x} = 0$ oder $[\![\mathbb{P} S(x)]\!]^{M,t,h^d_x} = 1$ gdw

für alle $d \in U$: es gibt kein $t' > t$ mit $[\![S(x)]\!]^{M,t',h^d_x} = 1$

oder es gibt ein $t' < t$ mit $[\![S(x)]\!]^{M,t',h^d_x} = 1$ gdw

für alle $d \in U$: es gibt kein $t' > t$ mit $h^d_x(x) \in V(S)(t')$

oder es gibt ein $t' < t$ mit $h^d_x(x) \in V(S)(t')$ gdw

$\boxed{\text{für alle } d \in U: \text{ es gibt kein } t' > t \text{ mit } d \in V(S)(t') \text{ oder es gibt ein } t' < t \text{ mit } d \in V(S)(t')}$

Jetzt bewerten wir wieder an jedem Zeitpunkt von T in M:

für t_1: da es keinen Zeitpunkt vor t_1 gibt, ist das rechte Disjunkt nie wahr; also hängt alles vom linken Disjunkt ab!

$d = H.$: es gibt einen Zeitpunkt $t' > t_1$, an dem $H. \in V(S)(t')$, nämlich t_2: $H. \in V(S)(t_2) = \{H., M.\}$

also ist das linke Disjunkt für ein $d \in U$ nicht erfüllt; also ist die Formel an t_1 falsch!

für t_2: $d = H.$: es gibt ein $t' < t_2$ mit $H. \in V(S)(t')$, nämlich t_1: $H. \in V(S)(t_1) = \{H., M., P.\}$, also ist das rechte Disjunkt erfüllt!

$d = M.$: analog

$d = P.$: analog

Also gilt die Formel für alle $d \in U$ und ist damit an t_2 wahr!

4.2 Die Formeln FFA → FA und PPA → PA sind gültig in L_{PT}. Zeige, daß die Umkehrungen der beiden Formeln nicht gültig sind! (z.B. durch Angabe einer geeigneten Modellstruktur)

(i) Zeige: $FA \to FFA$ nicht gültig in L_{PT}.

Wir zeigen ein Gegenbeispiel, d.h. eine Modellstruktur für L_{PT}, die das Antezedenz des Konditionals wahr macht, und das Konsequent falsch macht, an einem Zeitpunkt!

$t_1 \longrightarrow t_2$ (P bei t_2)

d.h.

V	t_1	t_2
P	egal	1

$[\![Fp]\!]^{M,t_1,h} = 1$, da es einen zukünftigen Zeitpunkt von t_1 gibt, nämlich t_2, an dem gilt: $[\![p]\!]^{M,t_2,h} = 1$

$[\![FFp]\!]^{M,t_1,h} = 0$, da der einzige zukünftige Zeitpunkt von t_1, nämlich t_2, Fp falsch macht, d.h. $[\![Fp]\!]^{M,t_2,h} = 0$, weil es ja für t_2 keinen zukünftigen Zeitpunkt gibt.

(ii) Zeige: $PA \to PPA$ ist nicht gültig in L_{PT}.

Auch hier zeigen wir ein Gegenbeispiel, d.h. eine Modellstruktur M und einen Zeitpunkt t in dieser Modellstruktur an dem PA wahr ist und PPA falsch ist.

$t_1 \longrightarrow t_2$ (P bei t_1)

$[\![PA]\!]^{M,t_2,h} = 1$ (Argumentation ähnlich wie in

4.3 (a) Zeige, daß die Formel FPA → PA ∨ A ∨ FA in L_{PT} gültig ist!
(b) Gilt die Umkehrung auch? Begründung!

(a) Zeige, daß $FPA \to (PA \vee A \vee FA)$ gültig ist in L_{PT}.

1 Sei $[\![FPA]\!]^{M,t,h} = 1$ (M,t,h beliebig) Annahme

2 d.h. es gibt ein t' mit $t < t'$ und ein $t'' < t'$ mit $[\![A]\!]^{M,t'',h} = 1$

3 Für t'' gilt: $t'' < t$ oder $t'' = t$ oder $t < t''$

4	4a Sei $t'' < t$	4b Sei $t'' = t$	4c Sei $t < t''$
5	5a Dann gilt $[\![PA]\!]^{M,t,h} = 1$	5b Dann gilt $[\![A]\!]^{M,t,h} = 1$	5c Dann gilt $[\![FA]\!]^{M,t,}$

6 Also gilt $[\![PA \vee A \vee FA]\!]^{M,t,h} = 1$

Da M,t und h beliebig gewählt waren, gilt dies für alle M,t und h. Also ist die Formel gültig in L_{PT}. ∎

(b) Antwort: Die Umkehrung gilt nicht!

Zeige: $(PA \vee A \vee FA) \to FPA$ ist nicht gültig in L_{PT}

Wir zeigen wieder ein Gegenbeispiel, d.h. eine Modellstruktur M und einen Zeitpunkt t in M, so daß das Antezedenz wahr und das Konsequent falsch ist.

$T = \{t_1\}$ Da $[\![p]\!]^{M,t_1,h} = 1$ gilt: $[\![Pp \vee p \vee Fp]\!]^{M,t_1,h} = 1$

mit

V	t_1

Aber, da es keinen späteren Zeitpunkt für t_1

~~4.4 Zeige, daß (a) und (b) in L_{PT} äquivalent sind!~~

(a) FA ∧ FB
(b) F(A∧B) ∨ F(FA∧B) ∨ F(A∧FB)

(→)

1 Sei $[\![FA \wedge FB]\!]^{M,t,h} = 1$ Annahme
(M,t,h beliebig)

2 Dann gilt $[\![FA]\!]^{M,t,h} = 1$ <u>und</u> $[\![FB]\!]^{M,t,h} = 1$

3 Also: es gibt ein $t' > t$ und $[\![A]\!]^{M,t',h} = 1$
und es gibt ein $t'' > t$ mit $[\![B]\!]^{M,t'',h} = 1$

4 Es gibt für t' und t'' 3 Fälle zu betrachten:
(i) $t' = t''$, (ii) $t' > t''$ und (ii) $t' < t''$

5 Fall (i): Dann gilt $[\![F(A \wedge B)]\!]^{M,t,h} = 1$

6 Fall (ii): Dann gilt $[\![FA \wedge B]\!]^{M,t'',h} = 1$
und damit $[\![F(FA \wedge B)]\!]^{M,t,h} = 1$

7 Fall (iii): Dann gilt $[\![(A \wedge FB)]\!]^{M,t',h} = 1$
und damit $[\![F(A \wedge FB)]\!]^{M,t,h} = 1$

8 Also gilt $[\![F(A \wedge B) \vee F(FA \wedge B) \vee F(A \wedge FB)]\!]^{M,t,h} = 1$ ∎

4.4 (Fortsetzung)

(←) 1 $[\![F(A \wedge B) \vee F(FA \wedge B) \vee F(A \wedge FB)]\!]^{M,t,h} = 1$
(M,t und h beliebig)

2 D.h. $[\![F(A \wedge B)]\!]^{M,t,h} = 1$ oder
$[\![F(FA \wedge B)]\!]^{M,t,h} = 1$ oder
$[\![F(A \wedge FB)]\!]^{M,t,h} = 1$

Fall 1: 3 Sei $[\![F(A \wedge B)]\!]^{M,t,h} = 1$
Also gibt es ein $t' > t$ mit $[\![A \wedge B]\!]^{M,t',h} = 1$
Damit gilt: $[\![A]\!]^{M,t',h} = 1$ und $[\![B]\!]^{M,t',h} = 1$
Also gibt es ein $t' > t$ mit $[\![A]\!]^{M,t',h} = 1$
und es gibt ein $t' > t$ mit $[\![B]\!]^{M,t',h} = 1$
Also $[\![FA]\!]^{M,t,h} = 1$ und $[\![FB]\!]^{M,t,h} = 1$
Schließlich $[\![FA \wedge FB]\!]^{M,t,h} = 1$

Fall 2 Sei $[\![F(FA \wedge B)]\!]^{M,t,h} = 1$
Also gibt es ein $t' > t$ mit $[\![FA \wedge B]\!]^{M,t',h} = 1$
D.h. ∃ es — " — $[\![FA]\!]^{M,t',h} = 1$ und $[\![B]\!]^{M,t',h} = 1$
D.h. — " — und es gibt ein $t'' > t'$ mit $[\![A]\!]^{M,t'',h} = 1$
und $[\![B]\!]^{M,t',h} = 1$
D.h. es gibt ein $t'' > t$ mit $[\![A]\!]^{M,t'',h} = 1$
und es gibt ein $t' > t$ mit $[\![B]\!]^{M,t',h} = 1$
D.h. $[\![FA]\!]^{M,t,h} = 1$ und $[\![FB]\!]^{M,t,h} = 1$
D.h. $[\![FA \wedge FB]\!]^{M,t,h} = 1$

Fall 3 (analog zu Fall 2)

8

4.5 Welche Folgerungs-/Äquivalenzbeziehungen bestehen zwischen den drei folgenden L_{PT}-Formeln?

(a) $P\forall x\,(Gx \vee Hx)$
(b) $\forall x\,P\,(Gx \vee Hx)$
(c) $\forall x\,(PGx \vee PHx)$

(i) (a) $\models$ (b), (c)

(ii) (b) äquivalent mit (c)

(iii) (b) $\not\models$ (a)

Um (iii) zu zeigen konstruieren wir folgendes Gegenbeispiel:

$$M = \langle U = \{0,1\},\ T = \{t_1, t_2, t_3\},\ V \rangle$$
$$t_1 < t_2 < t_3$$

wobei V:

	t_1	t_2	t_3
G	$\{0\}$	$\emptyset$	egal
H	$\emptyset$	$\{1\}$	egal

Hier gibt es für jedes Individuum $d \in U$ einen Zeitpunkt $t' < t_3$ so dass $d \in V(G)(t')$ oder $d \in V(H)(t')$.
Nämlich für 0 ist es der Zeitpunkt t_1
und für 1 ist es der Zeitpunkt t_2
} also ist (b) wahr in M am Zeitpunkt t

Es gibt jedoch keinen Zeitpunkt $t' < t_3$ so dass für alle $d \in U$ ... (a) ist

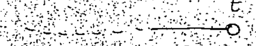
4.6 Wie kann die Definition der Modellstruktur für L_{PT} so eingeschränkt werden, daß (a), (b) und (c) gültig werden (die Umkehrungen der Implikationen in 4.2 und 4.3)?

(a) $FA \rightarrow FFA$
(b) $PA \rightarrow PPA$
(c) $PA \vee A \vee FA \rightarrow FPA$

(i) Damit (a) und (b) gültig sind, darf man nur Modellstrukturen $M = \langle U, T, <, V \rangle$ zulassen, in denen $\langle T, < \rangle$ eine dichte Zeitstruktur ist; d.h. zwischen 2 verschiedenen Zeitpunkten t_1 und t_2 muss es einen dritten, t_3, geben: $t_1 < t_3 < t_2$ ($t_1 < t_2$)

(ii) (c) ist nur gültig wenn $\langle T, < \rangle$ unendlich in der Zukunft ist.

(Dann kann z.B. folgenden Fall nicht eintreten:



t letzter Zeitpunkt in T

p wahr an t

damit $Pp \vee p \vee Fp$ wahr an t

aber nicht: FPp wahr an t)

Einführung in die Semantik

Übungsblatt 5

MUSTERLÖSUNGEN

Werner Saurer Wintersemester

Einführung in die Semantik

Übungsblatt 5

MUSTERLÖSUNGEN

Werner Saurer Wintersemester

(Original)

MUSTERLÖSUNGEN

Werner Saurer

WS

Vorlesung: Einführung in die Semantik

Übungsblatt 5

5.1 Dies ist die Hans-Peter-Maria-Modellstruktur, bei der Zeitpunkte als Welten reinterpretiert wurden

V	w_1	w_2	w_3
Hans	*H.*	*H.*	*H.*
Peter	*P.*	*P.*	*P.*
Maria	*M.*	*M.*	*M.*
der Präsident	*H.*	*H.*	*P.*
schläft	{*H.*,*P.*,*M.*}	{*H.*,*M.*}	{*P.*}
es regnet	1	0	0

Berechne in dieser Modellstruktur die Werte der folgenden Aussagen für alle $w \in W$

(a) $\forall x(\Diamond$ schläft $(x) \rightarrow$ schläft $(x))$
(b) $\Box\, \exists x$ schläft (x)
(c) $\exists x\, \Box$ schläft (x)
(d) $\Box$ schläft(der-Präsident)

(a) $\forall x\, [\Diamond S(x) \rightarrow S(x)]$ „Wer schlafen kann, schläft auch"

$[\![\forall x\, [\Diamond S(x) \rightarrow S(x)]]\!]^{M,w,h} = 1$ gdw

für alle $d \in U$: $[\![\Diamond S(x) \rightarrow S(x)]\!]^{M,w,h_x^d} = 1$ gdw

für alle $d \in U$: $[\![\Diamond S(x)]\!]^{M,w,h_x^d} = 0$ oder $[\![S(x)]\!]^{M,w,h_x^d} = 1$ gdw

für alle $d \in U$: es gibt kein $w' \in W$ mit $[\![S(x)]\!]^{M,w',h_x^d} = 1$ oder $[\![S(x)]\!]^{M,w,h_x^d} = 1$

für alle $d \in U$: es gibt kein $w' \in W$ mit $[\![x]\!]^{M,w',h_x^d} \in [\![S]\!]^{M,w',h_x^d}$ oder $[\![x]\!]^{M,w,h_x^d} \in [\![S]\!]^{M,w,h_x^d}$

für alle $d \in U$: es gibt kein $w' \in W$ mit $h_x^d(x) \in V(S)(w')$ oder $h_x^d(x) \in V(S)(w)$.

$\boxed{\text{für alle } d \in U : \text{ es gibt kein } w' \in W \text{ mit } d \in V(S)(w') \text{ oder}}$

Jetzt müssen wir für die einzelnen Welten in W nachprüfen, ob die errechnete Wahrheitsbedingung erfüllt ist.

w_1 : $d = H.$ ✓, da rechtes Disjunkt gilt: $H. \in V(S)(w_1) = \{H., P., M.\}$
$d = P.$ ✓, —"— $P. \in \{H., P., M.\}$
$d = M.$ ✓, —"— $M. \in \{H., P., M.\}$

Also gilt es für alle $d \in U$; damit ist die Formel wahr in M an ~~Zeitpunkt~~ der Welt w_1.

w_2 : $d = P.$: hier gilt weder das linke Disjunkt (es gibt nämlich eine mögliche Welt, nämlich w_1, in der $P.$ schläft), noch das rechte Disjunkt ($P. \notin V(S)(w_2) = \{H., M.\}$).
Also gilt es nicht für alle $d \in U$; deshalb ist die Formel falsch in M an der Welt w_2.

w_3 : $d = H.$: hier gilt weder das linke noch das rechte Disjunkt der Wahrheitsbedingung, also ist die Formel falsch in M an der Welt w_3.

5.1 (b) $\Box\, \exists x\, S(x)$ „Es ist notwendig, dass jemand schläft."
unspezifisch

$[\![\Box\, \exists x\, S(x)]\!]^{M,w,h} = 1$ gdw

für alle $w' \in W$: $[\![\exists x\, S(x)]\!]^{M,w',h} = 1$ gdw

für alle $w' \in W$ gibt es ein $d \in U$ mit $[\![S(x)]\!]^{M,w',h_x^d} = 1$ gdw

für alle $w' \in W$ gibt es ein $d \in U$ mit $[\![x]\!]^{M,w',h_x^d} \in [\![S]\!]^{M,w',h_x^d}$ gdw

für alle $w' \in W$ gibt es ein $d \in U$ mit $h_x^d(x) \in V(S)(w')$ gdw

$\boxed{\text{für alle } w' \in W \text{ gibt es ein } d \in U \text{ mit } d \in V(S)(w')}$

Wieder müssen wir für jede Welt in W feststellen, ob diese Bedingung erfüllt ist.

w_1 : Die Bedingung ist erfüllt in w_1, da in jeder Welt $w' \in W$ $V(S)(w') \neq \emptyset$ ist.
Also ist die Formel wahr in M an der Welt w_1.

Analoges gilt für w_2 und w_3.

Die Formel ist also wahr in M relativ zu jeder Welt.

5.1 (c) $\exists x\, \Box\, S(x)$ „Es gibt jemanden, der notwendigerweise schläft."

$[\![\exists x\, \Box\, S(x)]\!]^{M,w,h} = 1$ gdw

es gibt ein $d \in U$ so dass $[\![\Box\, S(x)]\!]^{M,w,h_x^d} = 1$ gdw

es gibt ein $d \in U$ so dass für jedes $w' \in W$ gilt: $[\![S(x)]\!]^{M,w',h_x^d} = 1$ gdw

es gibt ein $d \in U$ so dass für jedes $w' \in W$ gilt: $[\![x]\!]^{M,w',h_x^d} \in [\![S]\!]^{M,w',h_x^d}$ gdw

$\boxed{\text{es gibt ein } d \in U \text{ so dass für jedes } w' \in W \text{ gilt: } d \in V(S)(w')}$

w_1 : die Bedingung ist nicht erfüllt, da es kein Individuum d in U gibt, das in jeder Welt schläft.
Also ist die Formel falsch in M an der Welt w_1.

Analoges gilt für w_2 und w_3.

Die Formel ist also falsch in M relativ zu jeder Welt.

5

5.1 (d) $\Box S(dp)$ "Es ist notwendig, dass der Präsident schläft."

$[\![\Box S(dp)]\!]^{M,w,h} = 1$ gdw

für jedes $w' \in W$ gilt: $[\![S(dp)]\!]^{M,w',h} = 1$ gdw

für jedes $w' \in W$ gilt: $[\![dp]\!]^{M,w',h} \in [\![S]\!]^{M,w',h}$ gdw

$\boxed{\text{für jedes } w' \in W \text{ gilt: } V(dp)(w') \in V(S)(w')}$

w_1: $V(dp)(w_1) \in V(S)(w_1)$

H. $\in \{H., P., M.\}$ ✓

$V(dp)(w_2) \in V(S)(w_2)$

H. $\in \{H., M.\}$ ✓

$V(dp)(w_3) \in V(S)(w_3)$

P. $\in \{P.\}$ ✓

Also gilt die Formel in M an der Welt w_1.

Analoges gilt für w_2 und w_3.

Die Formel ist also wahr in M relativ zu jeder Welt.

5.2 Welche der Aussagen unter 5.1 können ihren Wahrheitswert von Welt zu Welt ändern, welche nicht?

Nur die Formel (a) $\forall x [\Diamond S(x) \rightarrow S(x)]$ kann ihren Wahrheitswert von Welt zu Welt ändern, da die Teilformel $S(x)$ (das Konsequent des eingebetteten Konditionals) nicht im Skopus eines Modaloperators steht. (Man sagt hier "$S(x)$ ist nicht modal geschlossen".)

5.3 Zeige die Gültigkeit der folgenden Formeln in L_{PM}:

(a) $\Box A \rightarrow \Box\Box A$
(b) $A \rightarrow \Box\Diamond A$
(c) $\Diamond A \rightarrow \Box\Diamond A$

(a)

1 Sei $[\![\Box A]\!]^{M,w,h} = 1$ Annahme

2 D.h. für jedes $w' \in W$: $[\![A]\!]^{M,w',h} = 1$

3 Es gilt dann für jede Welt w' (nicht nur für w) dass für jede Welt w' gilt: $[\![A]\!]^{M,w',h} = 1$

4 D.h. es gilt für jede Welt w', dass $[\![\Box A]\!]^{M,w',h} = 1$

4 D.h. $[\![\Box\Box A]\!]^{M,w,h} = 1$

■

7

5.3 (b) $A \rightarrow \Box\Diamond A$ gültig in L_{PM}.

1 Sei $[\![A]\!]^{M,w,h} = 1$ Annahme

2 D.h. für jede Welt w' gilt: $[\![\Diamond A]\!]^{M,w',h} = 1$

3 Deshalb $[\![\Box\Diamond A]\!]^{M,w',h} = 1$, für jedes $w' \in W$

4 Also $[\![\Box\Diamond A]\!]^{M,w,h} = 1$

■

(c) $\Diamond A \rightarrow \Box\Diamond A$ gültig in L_{PM}

1 Sei $[\![\Diamond A]\!]^{M,w,h} = 1$ Annahme

2 Dann gibt es ein $w' \in W$ mit $[\![A]\!]^{M,w',h} = 1$

3 Es gilt aber für jedes $w'' \in W$, dass es ein $w' \in W$ gibt mit $[\![A]\!]^{M,w',h} = 1$

4 Also gilt für jedes $w'' \in W$: $[\![\Diamond A]\!]^{M,w'',h} = 1$

5 Es gilt dann für alle $w''' \in W$: $[\![\Box\Diamond A]\!]^{M,w''',h} = 1$

6 und insbesondere dann: $[\![\Box\Diamond A]\!]^{M,w,h} = 1$

■

5.4 Im folgenden ist eine schematische Modellstruktur für L_{PMT} dargestellt.

h	t_1	t_2	t_3
w_1	a	a	a
w_2	a	a	a

p	t_1	t_2	t_3
w_1	b	b	b
w_2	b	b	b

m	t_1	t_2	t_3
w_1	c	c	c
w_2	c	c	c

dp	t_1	t_2	t_3
w_1	a	b	c
w_2	c	c	b

S	t_1	t_2	t_3
w_1	{a,b}	{a,c}	{b,c}
w_2	{a,b,c}	{a}	{a,b}

Berechne den Wahrheitswert der folgenden Aussagen für w_1 und t_2:

(a) $\forall x\, Sx$
(b) $F\forall x\, Sx$
(c) $\Diamond F\forall x\, Sx$
(d) $F\Diamond\forall x Sx$

(a) $[\![\forall x\, S(x)]\!]^{M,w_1,t_2,h} = 1$ gdw

für alle $d \in U$: $[\![S(x)]\!]^{M,w_1,t_2,h^d_x} = 1$ gdw

für alle $d \in U$: $h^d_x(x) \in V(S)(\langle w_1,t_2 \rangle)$ gdw

$\boxed{\text{für alle } d \in U: \quad d \in \{a,c\}}$

Diese Bedingung ist nicht erfüllt, da $b \notin \{a,c\}$.

Also ist die Formel falsch in M relativ zu w_1 und t_2.

5.4 (b) $\mathbb{F}\forall x S(x)$ "Es wird der Fall sein, dass alle schlafen"

$[\![\mathbb{F}\forall x S(x)]\!]^{M,w_1,t_2,h} = 1$ gdw

es gibt ein $t' > t_2$ so dass $[\![\forall x S(x)]\!]^{M,w_1,t',h} = 1$ gdw

es gibt ein $t' > t_2$ so dass für alle $d \in U$ gilt $[\![S(x)]\!]^{M,w_1,t',h^d_x} = 1$ gdw

$\boxed{\text{es gibt ein } t' > t_2 \text{ so dass für alle } d \in U \text{ gilt: } d \in V(S)(\langle w_1, t' \rangle)}$.

Das einzige t' in M für das gilt $t' > t_2$ ist t_3.
Es ist aber nicht der Fall, dass für alle $d \in U$ gilt: $d \in V(S)(\langle w_1, t_3 \rangle)$.
Denn $V(S)(\langle w_1, t_3 \rangle) = \{b, c\}$, und $a \notin \{b, c\}$.
Also ist die Formel falsch in M relativ zu w_1 und t_2.

(c) $\Diamond \mathbb{F}\forall x S(x)$ "Es ist möglich, dass alle schlafen werden."

$[\![\Diamond \mathbb{F}\forall x S(x)]\!]^{M,w_1,t_2,h} = 1$ gdw

es gibt ein $w' \in W$ und ein $t' \in T$ so dass $[\![\mathbb{F}\forall x S(x)]\!]^{M,w',t',h} = 1$ gdw

es gibt ein $w' \in W$ und ein $t' \in T$ so dass für ein $t'' > t'$ gilt:
$[\![\forall x S(x)]\!]^{M,w',t'',h} = 1$ gdw

es gibt ein $w' \in W$ und ein $t' \in T$ so dass für ein $t'' > t'$ gilt
dass für alle $d \in U$: $[\![S(x)]\!]^{M,w',t'',h^d_x} = 1$ gdw

$\boxed{\text{es gibt } w' \in W \text{ und } t' \in T \text{ so dass für ein } t'' > t' \text{ gilt: für alle } d \in U \text{ gilt: } d \in V(S)(\langle w', t'' \rangle)}$

Für w' kommen sowohl w_1 als auch w_2 in Frage; für t' kommt im günstigsten Fall t_1 in Frage; d.h. t'' könnte t_2 oder t_3 sein. Aber

5.4 (c) (Fortsetzung)

Also ist die Formel $\Diamond \mathbb{F}\forall x S(x)$ falsch in M an w_1, t_2.

(d) $\mathbb{F} \Diamond \forall x S(x)$ "Es wird der Fall sein, dass möglicherweise alle schlafen"

$[\![\mathbb{F} \Diamond \forall x S(x)]\!]^{M,w_1,t_2,h} = 1$ gdw

es gibt ein $t' > t_2$ so dass $[\![\Diamond \forall x S(x)]\!]^{M,w_1,t',h} = 1$ gdw

es gibt ein $t' > t_2$ so dass für ein $w' \in W$ und ein $t'' \in T$ gilt:
$[\![\forall x S(x)]\!]^{M,w',t'',h} = 1$ gdw

$\boxed{\text{für ein } w' \in W \text{ und ein } t'' \in T \text{ gilt: für alle } d \in U:\ d \in V(S)(\langle w', t'' \rangle)}$

NB: Die Bedingung "es gibt ein $t' > t_2$" ist irrelevant geworden!

Es gibt so ein Paar $\langle w', t'' \rangle$, "an dem" alle schlafen, nämlich $\langle w_2, t_1 \rangle$.

Also ist die Formel $\mathbb{F} \Diamond \forall x S(x)$ wahr in M an w_1, t_2.

5.5 (a) Definiere den Begriff der Modellstruktur für die temporale Prädikatenlogik mit vorwärtsverzweigender Zeit ($L_{PT'}$; Eigenschaften der Relation < angeben!).

$\langle T, < \rangle$ muss folgende Bedingungen erfüllen:

$<$ irreflexiv : $\forall t: t \not< t$

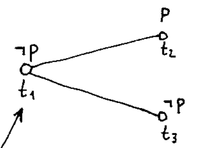
transitiv : $\forall t, t', t'': t < t'$ und $t' < t'' \Rightarrow t < t''$

"in Richtung Vergangenheit verbunden" : $\forall t, t', t'': [t' < t$ und $t'' < t \Rightarrow t' < t''$ oder $t'' < t'$ oder $t' = t'']$

(b) Nimm an, daß die Zeitoperatoren wie in L_{PT} definiert sind. Finde Beispiele für Formeln, die L_{PT}-gültig, aber nicht $L_{PT'}$-gültig sind. Gibt es auch den umgekehrten Fall? Begründung!

$\mathbb{F}A \rightarrow \mathbb{G}(\mathbb{P}A \vee A \vee \mathbb{F}A)$ gültig in L_{PT}

aber nicht gültig in $L_{PT'}$, wie folgendes Gegenbeispiel zeigt:



hier gilt:
$\mathbb{F}p$ (wegen t_2)
aber nicht
$\mathbb{G}(\mathbb{P}p \vee p \vee \mathbb{F}p)$

Den umgekehrten Fall gibt es nicht, da lineare Zeit (L_{PT}) trivialerweise auch vorwärtsverzweigend ist ($L_{PT'}$).

5.5

(c) Charakterisiere die Eigenschaft der eindeutigen (nicht-verzweigenden) Vergangenheit durch ein Axiom.

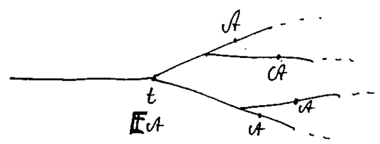
$$\mathbb{P}A \rightarrow \mathbb{H}(\mathbb{P}A \vee A \vee \mathbb{F}A)$$

(d) Die beiden Futur-Operatoren F und G sind in $L_{PT'}$ nicht geeignet, die intuitive Semantik des einfachen Futur wiederzugeben. F ist zu schwach, G ist zu stark. Versuche, einen Operator E zu definieren (durch Angabe der Interpretationsregel für EA), der ausdrückt, daß ein Sachverhalt irgendwann eintreten wird.

In vorwärtsverzweigender Zeitstruktur ($L_{PT'}$) ist $\mathbb{F}$ zu schwach, um das Futur (z.B. "Es wird regnen") auszudrücken, da $\mathbb{F}A$ nur verlangt, dass es irgendeinen Zeitpunkt in der Zukunft gibt, an dem A wahr ist. (Es muss ja nur auf einem "Zweig" in der Zukunft regnen, in anderen Zweigen nicht.)

$\mathbb{G}A$, andererseits, ist zu stark, da es ja verlangt, dass A an jedem zukünftigen Zeitpunkt – auf jedem Zweig – wahr ist.

Die Bedingung für EA muss also garantieren, dass auf jedem Zweig von t aus gesehen irgendwann in der Zukunft von t A wahr ist.



$[\![EA]\!]^{M,t,h} = 1$ gdw für jedes $t' > t$ gilt

(a) es gibt $t'' \geq t'$ mit $[\![A]\!]^{M,t'',h} = 1$

oder (b) es gibt ein t'' mit: $t < t'' < t'$, so dass

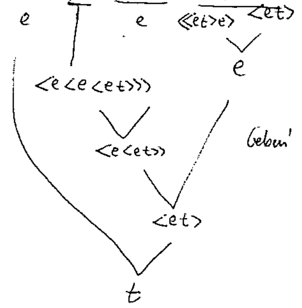
Übungsblatt 6

Musterlösungen

(Einf. in die Semantik, Sommer Winter Semester)

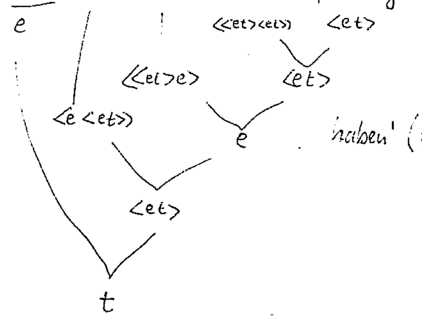
Übungsblatt 6

6.1. (a) Hans gibt Maria das Buch



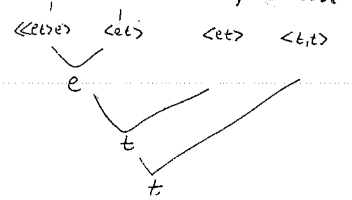
Geben'(das'(Buch'))(Maria')(Hans')

(b) Peter hat einen roten Sportwagen



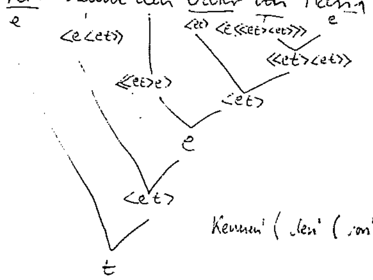
haben'(einen'(roten'(Sportwagen'))(Pet

(c) Der Präsident schläft selten — Satzadverb "Es ist selten der Fall, dass.."



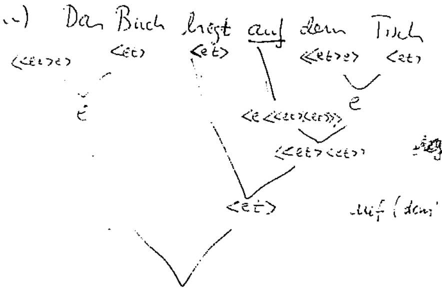
Selten'(schläft'(der'(Präsident')))

6.1 (d) Peter kennt den Vater von Maria



Kennen'(den'(von'(Maria')(Vater'))(Peter')

e) Das Buch liegt auf dem Tisch.



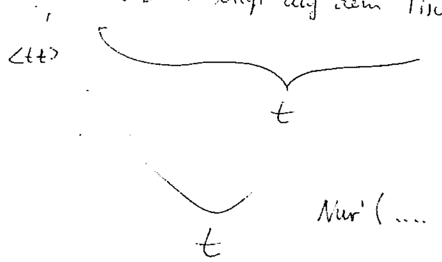
auf(dem'(Tisch'), liegen')(das'(Buch'))

"kein NP"-Modifikator

f) Nur das Buch liegt auf dem Tisch.

$\forall x[\text{auf-dem-Tisch}(x) \rightarrow x = \text{das Buch}]$

$\neg \exists x[\text{auf-dem-Tisch}(x) \wedge \neg x = \text{das Buch}]$



Nur'(.... "...)

alternativ: $nur'_{\langle e,e\rangle}(das_{\langle\langle et\rangle e\rangle}(Buch_{\langle et\rangle}))$??

6.1 (g) Im Nebel fährt Hans viel zu schnell

viel $\langle \tau, \tau \rangle$ wobei

$\tau = \langle\langle\langle et\rangle\langle et\rangle\rangle\langle\langle et\rangle\langle et$

$\Uparrow$

denn man kann nicht sagen:

* viel schnell fahren!

viel zu hat denselben Typ wie zu

in dem Nebel

<<et>e> <et>

<e<t,t>>

falls dies als Satzop. verstanden wird

Im'(Nebel')(viel'(zu')(schnell'))(fahren')(Hans'))

6.④

6.2 Welche Typen für *und*?

(a) Hans arbeitet und Maria liest ein Buch.
t $\langle t \langle t t \rangle\rangle$ t

(b) Hans arbeitet und liest ein Buch
$\langle et \rangle$ $\langle et \rangle$

$\langle\langle et \rangle\langle\langle et \rangle\langle et \rangle\rangle\rangle$

(c) Hans liest ein Buch und drei Aufsätze.
e e

$\langle e \langle e e \rangle\rangle$

(d) Hans arbeitet schnell und gründlich
$\langle\langle et \rangle\langle et \rangle\rangle$ $\langle\langle et \rangle\langle et \rangle\rangle$

$\langle\langle\langle et \rangle\langle et \rangle\rangle\langle\langle\langle et \rangle\langle et \rangle\rangle\langle\langle et \rangle\langle et \rangle\rangle\rangle\rangle$

$\langle\langle et \rangle\langle et \rangle\rangle$

allgemein: $\langle \tau \langle \tau\tau \rangle\rangle$ wobei τ der Typ der und-Phrase ist.

6.3 (a) ~~Vereinfachte~~

(i) vereinfachte Formalisierung:

$$\forall F_{\langle et \rangle} [F(a) \rightarrow F(b)]$$

(ii) Bernd hat alle Eigenschaften, die Albert hat.

(b)

(i) vereinfachte Formalisierung:

$$\forall F [\mathcal{G}(F) \rightarrow \exists x\, F(x)]$$

(ii) Für jede nützliche Eigenschaft gibt es jemanden, der sie hat.

(c)

(i) vereinfachte Formalisierung

$$\exists x\, \forall F [\mathcal{G}(F) \rightarrow F(x)]$$

(ii) Es gibt jemanden, der alle nützlichen Eigenschaften hat.

6.3 (d)

(i) vereinfachte Formalisierung

$$\exists F_{\langle et \rangle} \forall G_{\langle et \rangle} \forall x_e [\mathcal{A}(G)(x) \rightarrow (G(x) \wedge F(x))].$$

(iii) Dies ist das Bedeutungspostulat für referentielle (oder auch: intersektive) Adjektive.

Dies besagt, dass es für Adjektive dieser Klasse immer entsprechende Eigenschaften 1. Stufe ($F_{\langle et \rangle}$) gibt, so dass ein "A-iges" G immer dargestellt werden kann als ein G, das F ist.

z.B. ein Blonder'$_{\langle\langle et \rangle\langle et \rangle\rangle}$ (student'$_{\langle et \rangle}$) ist ein student'$_{\langle et \rangle}$, der blond'$_{\langle et \rangle}$ ist.

Bedeutungspostulat für restriktive Adjektive:

$$\forall G_{\langle et \rangle} \forall x_e [\mathcal{A}(G)(x) \rightarrow G(x)]$$

z.B. ein Leidenschaftlicher'$_{\langle\langle et \rangle\langle et \rangle\rangle}$ (logiker'$_{\langle et \rangle}$) ist ein logiker'$_{\langle et \rangle}$.

Bedeutungspostulat für privative Adjektive:

$$\forall G_{\langle et \rangle} \forall x_e [\mathcal{A}(G)(x) \rightarrow \neg G(x)]$$

z.B. ein Falscher'$_{\langle\langle et \rangle\langle et \rangle\rangle}$ (hase'$_{\langle et \rangle}$) ist kein hase'$_{\langle et \rangle}$.

6.4. Sei $M = \langle U, D, V \rangle$ eine Modellstruktur für L_{TYP}. mit $U = \{H., M.\}$

Wertebereiche für:

(a) $\tau = \langle e,t \rangle \longrightarrow D_\tau = D_t^{D_e} = \{0,1\}^{\{H.,M.\}}$ (4 Elem.

(b) $\tau = \langle e,e \rangle \longrightarrow D_\tau = D_e^{D_e} = \{H.,M.\}^{\{H.,M.\}}$ (4 Elem.

(c) $\tau = \langle\langle e,t \rangle, t \rangle \longrightarrow D_\tau = D_t^{(D_t^{D_e})} = \{0,1\}^{(\{0,1\}^{\{H.,M.\}})}$ (16 Elemente

6.5 Typtheoretisches Denotat (in der "Nördliche-Bundesländer"-Modellstruktur) der Relation "grenzt-an" ($\in Con_{\langle e\langle et \rangle\rangle}$)

$$V(\text{grenzt-an}') \in \left(\{0,1\}^{\{HB, HH, NS, NW, SH\}}\right)^{\{HB, HH, NS, NW, SH\}}$$

Mengentheoretische Darstellung (d.h. als Menge von geordneten Paaren):

$\{ \langle HB, NS \rangle, \langle NS, HB \rangle, \langle HH, NS \rangle, \langle NS, HH \rangle, \langle HH, SH \rangle, \langle SH, HH \rangle, \langle NS, NW \rangle, \langle NW, NS \rangle, \langle NS, SH \rangle, \langle SH, NS \rangle \}$

10 Paare!

10× dw 1 6.⑧

HB	HB	0	an Bremen grenzen
	HH	0	
	NS	1	
	NW	0	
	SH	0	
HH	HB	0	an Hamburg grenzen
	HH	0	
	NS	1	
	NW	0	
	SH	1	
NS	HB	1	an Nieder=Sachsen grenzen
	HH	1	
	NS	0	
	NW	1	
	SH	1	
NW	HB	0	an NW grenzen
	HH	0	
	NS	1	
	NW	0	
	SH	0	
SH	HB	0	an SH grenzen
	HH	1	
	NS	1	
	NW	0	
	SH	0	

Einf. in die Semantik
W. Sauren

Musterlösungen

Übungsblatt 7

Übungsblatt Nr. 7 (Musterlösungen)

7.1 (a)

$$\boxed{[\![\lambda x [\text{kennt}'(x)(h^*) \wedge \text{liebt}'(x)(p^*)](m^*)]\!]^{M,h}} = 1$$

$$\underbrace{[\![\lambda x [\text{kennt}'(x)(h^*) \wedge \text{liebt}'(x)(p^*)]]\!]^{M,h}}\,(\underbrace{[\![m^*]\!]^{M,h}}_{V(m^*)})$$

das ist diejenige Funktion f in $D_t^{D_e}$ (d.h. $\{0,1\}^U$)
so dass für alle $d \in D_e$ gilt:

$f(d) = 1$ gdw $[\![\text{kennt}'(x)(h^*) \wedge \text{liebt}'(x)(p^*)]\!]^{M,h_x^d} = 1$

gdw $[\![\text{kennt}'(x)(h^*)]\!]^{M,h_x^d} = 1$ und $[\![\text{liebt}'(x)(p^*)]\!]^{M,h_x^d} = 1$

gdw $[\![\text{kennt}']\!]^{M,h_x^d}([\![x]\!]^{M,h_x^d})([\![h^*]\!]^{M,h_x^d}) = 1$ und

$[\![\text{liebt}']\!]^{M,h_x^d}([\![x]\!]^{M,h_x^d})([\![p^*]\!]^{M,h_x^d}) = 1$

gdw $V(\text{kennt}')(h_x^d(x))(V(h^*)) = 1$ und

$V(\text{liebt}')(h_x^d(x))(V(p^*)) = 1$

$$\boxed{\begin{aligned}(d) = 1 \text{ gdw } & V(\text{kennt}')(d)(V(h^*)) = 1 \text{ und} \\ & V(\text{liebt}')(d)(V(h^*)) = 1\end{aligned}}$$

Wenden wir die Funktion f nun auf das Argument $V(m^*)$ an, dann erhalten wir:

$(V(m^*)) = 1$ gdw $V(\text{kennt}')(V(m^*))(V(h^*)) = 1$ und $V(\text{liebt}')(V(m^*))(V(p^*))$

7.1 (b)

Hans und Peter arbeiten.

$$\boxed{[\![\lambda F [F(h^*) \wedge F(p^*)](\text{arbeiten}')]\!]^{M,h}} = 1$$

$$\underbrace{[\![\lambda F [F(h^*) \wedge F(p^*)]]\!]^{M,h}}\,(\underbrace{[\![\text{arbeiten}']\!]^{M,h}}_{V(\text{arbeiten}')})$$

das ist diejenige Funktion f in $D_t^{D_{\langle e,t\rangle}} = D_t^{(D_t^{D_e})} = \{0,1\}^{(\{0,1\}^U)}$

so dass für alle $\mathcal{F} \in D_{\langle e,t\rangle}$ gilt:

$f(\mathcal{F}) = 1$ gdw $[\![F(h^*) \wedge F(p^*)]\!]^{M,h_F^{\mathcal{F}}} = 1$

gdw $[\![F(h^*)]\!]^{M,h_F^{\mathcal{F}}} = 1$ und $[\![F(p^*)]\!]^{M,h_F^{\mathcal{F}}} = 1$

gdw $[\![F]\!]^{M,h_F^{\mathcal{F}}}([\![h^*]\!]^{M,h_F^{\mathcal{F}}}) = 1$ und $[\![F]\!]^{M,h_F^{\mathcal{F}}}([\![p^*]\!]^{M,h_F^{\mathcal{F}}}) = 1$

gdw $h_F^{\mathcal{F}}(F)(V(h^*)) = 1$ und $h_F^{\mathcal{F}}(F)(V(p^*)) = 1$

gdw $\mathcal{F}(V(h^*)) = 1$ und $\mathcal{F}(V(p^*)) = 1$

Wenden wir diese Funktion f nun an auf das Argument, $V(\text{arbeiten}')$, dann erhalten wir:

$f(V(\text{arbeiten}')) = 1$ gdw $V(\text{arbeiten}')(V(h^*)) = 1$ und $V(\text{arbeiten}')(V(p^*)) = 1$

MUSTERLÖSUNGEN für 7.2 + 7.3

7.1 (c) Kein Student arbeitet

$$\boxed{[\![\lambda F[\lambda G[\neg \exists x[F(x) \wedge G(x)]]](\text{Student}')(\text{arbeiten}')]\!]^{M,h} = 1}$$

$$\underbrace{[\![\lambda F[\lambda G[\neg \exists x[F(x) \wedge G(x)]]]]\!]^{M,h}}\left([\![\text{Student}']\!]^{M,h}\right)\left([\![\text{arbeiten}']\!]^{M,h}\right)$$

$[\![\text{Student}']\!]^{M,h} = V(\text{Student}')$, $[\![\text{arbeiten}']\!]^{M,h} = V(\text{arbeiten}')$

das ist diejenige Funktion f in $\left({D_t}^{D_{\langle et\rangle}}\right)^{D_{\langle et\rangle}} = \left({\{0,1\}}^{\wp(U)}\right)^{\wp(U)}$.

so dass für alle $\mathcal{F} \in D_{\langle et\rangle}$ gilt:

$f(\mathcal{F})$ ist diejenige Funktion g in ${D_t}^{D_{\langle et\rangle}}$, so dass für alle $\mathcal{G} \in D_{\langle et\rangle}$ gilt:

$g(\mathcal{G})\ (= f(\mathcal{F})(\mathcal{G})) = 1$ gdw

$$[\![\neg \exists x[F(x) \wedge G(x)]]\!]^{M,h^{\mathcal{F}\,\mathcal{G}}_{F\,G}} = 1$$

gdw $[\![\exists x[F(x) \wedge G(x)]]\!]^{M,h^{\mathcal{F}\,\mathcal{G}}_{F\,G}} = 0$

gdw es gibt kein $d \in D_e\ (=U)$, so dass

$$[\![F(x) \wedge G(x)]\!]^{M,h^{\mathcal{F}\,\mathcal{G}\,d}_{F\,G\,x}} = 1$$

(ein paar Schritte zusammengefasst!)

gdw es gibt kein $d \in U$ so dass $\mathcal{F}(d) = 1$ und $\mathcal{G}(d) = 1$

Wenden wir nun diese Funktion f auf die 2 Argumente, $V(\text{Student}')$ und $V(\text{arbeiten}')$ – in der Reihenfolge an – dann bekommen wir:

$V(\text{Student}')(V(\text{arbeiten}')) = 1$ gdw es gibt kein $d \in U$ so dass $V(\text{Student}')(d) = 1$

7.2 λ-Ausdrücke zuweisen

(a) genau ein $\lambda F[\lambda G[\exists x\{\forall y[(F(y) \wedge G(y)) \Leftrightarrow y = x]]]$

(b) kein $\lambda F[\lambda G[\neg \exists x[F(x) \wedge G(x)]]]$

(c) nur $\lambda F[\lambda G[\forall x[G(x) \rightarrow F(x)]]]$ Nur Männer rauchen

(d) Hans oder Peter $\lambda F[F(h^*) \vee F(p^*)]$

(e) oder $\lambda P[\lambda Q[\lambda F[P(F) \vee Q(F)]]]$ NP-Koordination

$\langle\langle et\rangle t\rangle$

$\lambda p[\lambda q[p \vee q]]$ Satz-Koordination

(f) blond "attributiv" $\lambda F[\lambda x[\text{blond}^*(x) \wedge F(x)]]$ prädikatives "blond"; blonder Student $\lambda x[\text{blond}^*(x) \wedge \text{Stu}$

(g) $\text{Vater}_{\langle et\rangle}$ $\lambda x[\exists y\ \text{Vater-von}'(y)(x)]$ Hans ist Vater $\exists y.\ \text{Vater-von}(y)(h^*)$

(h) verheiratet attributiv $\langle\langle et\rangle\langle et\rangle\rangle$ $\lambda F[\lambda x[F(x) \wedge \exists y\ \text{Verheiratet-mit}(y)(x)]]$

verheiratete Frau

$\lambda x[\text{Frau}'(x) \wedge \exists y\ \text{Verheiratet-mit}(y)(x)]$

7.3 (a) Kein Student ist Professor

kein $\mapsto \lambda F[\lambda G[\neg \exists x[F(x) \wedge G(x)]]]$ $\langle\langle et\rangle\langle\langle et\rangle t\rangle\rangle$

Student $\mapsto \text{Student}'_{\langle et\rangle}$

Professor $\mapsto \text{Professor}'_{\langle et\rangle}$

kein Student $\mapsto \lambda F[\lambda G[\neg \exists x[F(x) \wedge G(x)]]](\text{Student}')$

$\xrightarrow{\beta\text{-Red.}} \lambda G[\neg \exists x[\text{Student}'(x) \wedge G(x)]]$

$\boxed{\text{kein Student ist Professor}}$ $\mapsto \lambda G[\neg \exists x[\text{Student}'(x) \wedge G(x)]](\text{Professor}')$

$\xrightarrow{\beta\text{-Red.}} \boxed{\neg \exists x[\text{Student}'(x) \wedge \text{Professor}'(x)]}$

7.3 (b)

Kein blonder Student arbeitet.

kein $\mapsto \lambda F[\lambda G[\neg \exists x[F(x) \wedge G(x)]]]$

blond $\mapsto \lambda F[\lambda x[\text{blond}^*(x) \wedge F(x)]]$ $\langle\langle et\rangle\langle et\rangle\rangle$

Student $\mapsto \text{Student}'_{\langle et\rangle}$

"arbeiten" $\mapsto \text{arbeiten}'_{\langle et\rangle}$

blonder Student $\mapsto \lambda F[\lambda x[\text{blond}^*(x) \wedge F(x)]](\text{Student}')$

$\xrightarrow{\beta\text{-Red.}} \lambda x[\text{blond}^*(x) \wedge \text{Student}'(x)]$

kein blonder Student $\mapsto \lambda F[\lambda G[\neg \exists x[F(x) \wedge G(x)]]](\lambda x[\text{blond}^*(x) \wedge \text{Student}'(x)])$

$\xrightarrow{\beta\text{-Red.}} \lambda G[\neg \exists x[\lambda x[\text{blond}^*(x) \wedge \text{Student}'(x)](x) \wedge G(x)]]$

$\xrightarrow{\beta\text{-Red.}} \lambda G[\neg \exists x[[\text{blond}^*(x) \wedge \text{Student}'(x)] \wedge G(x)]]$

$\boxed{\text{kein blonder Student arbeitet}}$

$\mapsto \lambda G[\neg \exists x[[\text{blond}^*(x) \wedge \text{Student}'(x)] \wedge G(x)]](\text{arbeiten}')$

$\xrightarrow{\beta\text{-Red.}} \boxed{\neg \exists x[[\text{blond}^*(x) \wedge \text{Student}'(x)] \wedge \text{arbeiten}'(x)]}$

7.3 (c)

Genau ein verheirateter Student arbeitet

genau-ein $\mapsto \lambda F[\lambda G[\exists x \forall y[(F(y) \wedge G(y)) \leftrightarrow y=x]]]$

verheiratet $\mapsto \lambda F[\lambda x[F(x) \wedge \exists z \text{ Verheiratet-mit}'(x,z)]]$

Student $\mapsto$ Student'

arbeiten $\mapsto$ arbeiten'

verheirateter Student $\mapsto \lambda F[\lambda x[F(x) \wedge \exists y \text{ Verheiratet-mit}'(x,y)]](\text{Student}$

$\xrightarrow{\beta\text{-Red.}} \lambda x[\text{Student}'(x) \wedge \exists z \text{ Verheiratet-mit}'(x,z)]$

genau-ein verheirateter Student $\mapsto$

$\lambda F[\lambda G[\exists x \forall y[(F(y) \wedge G(y)) \leftrightarrow y=x]]](\lambda x[\text{Student}'(x) \wedge \exists z \text{ Verheiratet-mit}'(x,z)])$

$\xrightarrow{\beta\text{-Red.}} \lambda G[\exists x \forall y[\lambda x[\text{Student}'(x) \wedge \exists z \text{ Verheiratet-mit}'(x,z)](y) \wedge G(y)) \leftrightarrow y=x]]$

$\xrightarrow{\beta\text{-Red}} \lambda G[\exists x \forall y[[\text{Student}'(y) \wedge \exists z \text{ Verheiratet-mit}'(y,z)] \wedge G(y)) \leftrightarrow y=x]$

$\boxed{\text{genau ein verheirateter Student arbeitet}}$ $\mapsto$

$\lambda G[\exists x \forall y[[\text{student}'(y) \wedge \exists z \text{ Verheiratet-mit}'(y,z)] \wedge G(y)) \leftrightarrow y=x](\text{arbeiten}')$

Red. [illegible] $\text{arbeiten}'(y)) \leftrightarrow y=x]$

7.3 (d) Jeder Mensch hat einen Fehler 1. Lesart

Jeder $\mapsto \lambda F[\lambda G[\forall x[F(x) \rightarrow G(x)]]]$ $\langle\langle et\rangle\langle\langle et\rangle t\rangle\rangle$

Mensch $\mapsto \text{mensch}'_{\langle et\rangle}$

hat $\mapsto \text{hat}'_{\langle e\langle et\rangle\rangle}$

ein $\mapsto \lambda F[\lambda G[\exists x[F(x) \wedge G(x)]]]$

Fehler $\mapsto \text{fehler}'_{\langle et\rangle}$

jeder Mensch $\mapsto \lambda F[\lambda G[\forall x[F(x) \rightarrow G(x)]]](\text{mensch}')$

$\rightarrow \lambda G[\forall x[\text{mensch}'(x) \rightarrow G(x)]]$

einen Fehler $\mapsto \lambda F[\lambda G[\exists x[F(x) \wedge G(x)]]](\text{fehler}')$

$\rightarrow \lambda G[\exists x[\text{fehler}'(x) \wedge G(x)]]$

hat einen Fehler $\mapsto \lambda z[\lambda G[\exists y[\text{fehler}'(y) \wedge G(y)]](\lambda y[\text{hat}'(y)(z)])]$

(λz hat'(z, einen Fehler)

$\rightarrow \lambda z[\exists y[\text{fehler}'(y) \wedge \lambda y[\text{hat}'(y)(z)](y)]]$

$\rightarrow \lambda z[\exists y[\text{fehler}'(y) \wedge \text{hat}'(y)(z)]]$

Jeder Mensch hat einen Fehler $\mapsto$

$\lambda G[\forall x[\text{mensch}'(x) \rightarrow G(x)]](\lambda z[\exists y[\text{fehler}'(y) \wedge \text{hat}'(y)(z)]])$

$\rightarrow \forall x[\text{mensch}'(x) \rightarrow \lambda z[\exists y[\text{fehler}'(y) \wedge \text{hat}'(y)(z)]](x)]]$

$\rightarrow \boxed{\forall x[\text{mensch}'(x) \rightarrow \exists y[\text{fehler}'(y) \wedge \text{hat}'(y)(x)]]}$

7.3 (d) Jeder Mensch hat einen Fehler 2. Lesart

(im Sinne von: Einen Fehler hat jeder Mensch!)

λy. jeder Mensch hat y $\mapsto \lambda y[\lambda G[\forall x[\text{mensch}'(x) \rightarrow G(x)]](\lambda z[\text{hat}'(y)($

$\rightarrow \lambda y[\forall x[\text{mensch}'(x) \rightarrow \lambda z[\text{hat}'(y)(z)](x)]]$

$\rightarrow \lambda y[\forall x[\text{mensch}'(x) \rightarrow \text{hat}'(y)(x)]]$

Jeder Mensch hat einen Fehler $\mapsto$

$\lambda G[\exists y[\text{fehler}'(y) \wedge G(y)]](\lambda y[\forall x[\text{mensch}'(x) \rightarrow \text{hat}'(y)(x)]])$

$\rightarrow \exists y[\text{fehler}'(y) \wedge \lambda y[\forall x[\text{mensch}'(x) \rightarrow \text{hat}'(y)(x)]](y)]$

$\rightarrow \boxed{\exists y[\text{fehler}'(y) \wedge \forall x[\text{mensch}'(x) \rightarrow \text{hat}'(y)(x)]]}$

Einen Fehler hat wer jeder Mensch hat

wide scope!!

7.3 (e) Hans oder Peter kennt Maria und Anna. (1. Lesa

Hans $\mapsto h^*$

Peter $\mapsto p^*$

Maria $\mapsto m^*$

Anna $\mapsto a^*$

alles Typ e

kennen $\mapsto \text{kennen}'_{\langle e\langle et\rangle\rangle}$

oder $\mapsto \lambda x[\lambda y[\lambda P[P(x) \vee P(y)]]]$

Hans oder Peter $\mapsto \lambda x[\lambda y[\lambda P[P(x) \vee P(y)]]](h^*)(p^*)$

$\xrightarrow{2\times\ \beta\text{-Red}} \lambda P[P(h^*) \vee P(p^*)]$

und $\mapsto \lambda x[\lambda y[\lambda P[P(x) \wedge P(y)]]]$

Maria und Anna $\mapsto \lambda x[\lambda y[\lambda P[P(x) \wedge P(y)]]](m^*)(a^*)$

$\xrightarrow{2\times\ \beta\text{-Red.}} \lambda P[P(m^*) \wedge P(a^*)]$

kennt Maria und Anna $\mapsto$

$\lambda u[\lambda P[P(m^*) \wedge P(a^*)](\lambda v[\text{kennen}'(u,v)])]$

$\xrightarrow{\beta\text{-Red.}} \lambda u[\lambda v[\text{kennen}'(u,v)](m^*) \wedge \lambda v[\text{kennen}'(u,v)](a^*)]$

$\xrightarrow{2\times\ \beta\text{-Red}} \lambda u[\text{kennen}'(u,m^*) \wedge \text{kennen}'(u,a^*)]$

$\boxed{\text{Hans oder Peter kennt Maria und Anna}}$ $\mapsto$

$\lambda P[P(h^*) \vee P(p^*)](\lambda u[\text{kennen}'(u,m^*) \wedge \text{kennen}'(u,a^*)])$

$\xrightarrow{\text{Red.}} \lambda u[\text{kennen}'(u,m^*) \wedge \text{kennen}'(u,a^*)](h^*) \vee \lambda u[\text{kennen}'(u,m^*) \wedge \text{kennen}'(u,a^*)]($

7.3 (e) Hans oder Peter kennt Maria und Anna (2. Lesart)

Die Formalisierungen für

Hans, Peter, Maria, Anna, kennen, oder, und

sind genau wie bei der 1. Lesart.

Hans oder Peter
und
Maria und Anna
} ebenfalls genau wie bei 1. Lesart.

Hans oder Peter kennen x $\longmapsto$
(von Hans oder Peter gekannt werden)

$$\lambda v[\lambda P[P(h^*) \vee P(p^*)](\lambda u[\text{kennen}'(u,v)])]$$

$$\xrightarrow{\beta\text{-Red.}} \lambda v[\lambda u[\text{kennen}'(u,v)](h^*) \vee \lambda u[\text{kennen}'(u,v)](p^*)]$$

$$\xrightarrow{2\times\beta\text{-Red.}} \lambda v[\text{kennen}'(h^*,v) \vee \text{kennen}'(p^*,v)]$$

Hans ~~oder~~ Peter kennen Maria und Anna $\longmapsto$
(Maria und Anna werden von H. oder P. gekannt)

$$\lambda P[P(m^*) \wedge P(a^*)](\lambda v[\text{kennen}'(h^*,v) \vee \text{kennen}'(p^*,v)])$$

$$\xrightarrow{\beta\text{-Red.}} \lambda v[\text{kennen}'(h^*,v) \vee \text{kennen}'(p^*,v)](m^*) \wedge \lambda v[\text{kennen}'(h^*,v) \vee \text{kennen}'(p^*,v)](a^*)$$

$$\xrightarrow{x.\beta\text{-Red.}} \boxed{[\text{kennen}'(h^*,m^*) \vee \text{kennen}'(p^*,m^*)] \wedge [\text{kennen}'(h^*,a^*) \vee \text{kennen}'(p^*,a^*)]}$$

Musterlösungen für
Übungsblatt Nr. 8
(Intensionale Logik)

Werner Saurer WS

Vorlesung: Einführung in die Semantik

Übungsblatt 8

Die folgenden Abkürzungen für Konstante und Variable für IL weren verwendet:

Typ	Variable	Konstante
e	x,y,z	$j,d,m,n,0,1,2, \ldots$
<s,e>	r	-
<e,t>	X,Y	walk', B, M
<<s,e>,t>	Q	rise', change'
<s,<e,t>>	P	-
<e,e>	-	Sq
<e,<e,t>>	R	Gr, K, L
<s,t>	p	-
<e,<e,e>>	-	Plus

8.1 Berechne den Typ für jeden der folgenden Ausdrücke:

1. $\text{walk}'(j)$
2. $\text{change}'({}^\wedge j)$
3. $\lambda x[\text{walk}'(x)]$
4. $\lambda r[\text{rise}'(r)]$
5. $\lambda Q[Q = \text{rise}']$
6. $\lambda P[P = {}^\wedge\text{walk}']$
7. ${}^\vee P({}^\vee{}^\wedge j)$
8. $\lambda P[{}^\vee P(j)]$
9. $\lambda x[\text{Sq}(x)]$
10. ${}^\wedge[\lambda x[\text{Gr}(3)(x)]]$
11. $\lambda p[{}^\vee p = \Box\text{rise}'({}^\wedge j)]$
12. $\lambda x[\lambda p[{}^\vee p = \text{change}'({}^\wedge x)]]$
13. ${}^\vee{}^\wedge r$
14. ${}^\vee{}^\wedge\text{rise}'$
15. $\lambda x[R(x)(\text{Sq}(x))]$

8.2 Bestimme für jedes der folgenden Formelpaare, ob sie logisch äquivalent sind. Wenn nicht, gib eine Modellstruktur an, in der die beiden Formeln unterschiedliche Werte annehmen (partielle Spezifikation der Modellstruktur reicht).

(i)	j	${}^\vee{}^\wedge j$
(ii)	$B(j)$	$\lambda x[B(x)](j)$
(iii)	$\Box B(m)$	$\lambda x[\Box B(x)](m)$
(iv)	$\lambda P[{}^\vee P(j)]({}^\wedge\text{walk}')$	$\text{walk}'(j)$
(v)	$\exists r\ \text{walk}'({}^\vee r)$	$\exists x\ \text{walk}'(x)$
(vi)	$\exists r\ \text{change}'(r)$	$\exists x\ \text{change}'({}^\wedge x)$
(vii)	$L(j)(m)$	$L(m,j)$
(viii)	$\lambda x[\lambda y[\text{Gr}(y,x)](3)](2)$	$\lambda x[\lambda y[\text{Gr}(y,x)]](3)(2)$
(ix)	$\lambda p[\Box{}^\vee p]({}^\wedge\text{change}'({}^\wedge m))$	$\Box\text{change}'({}^\wedge m)$
(x)	$\lambda P[{}^\vee P(m)]({}^\wedge\lambda x[\text{walk}'(x)])$	$\text{walk}'(m)$
(xi)	$\lambda Q[Q({}^\wedge m)](\lambda r[\text{change}'(r)])$	$\text{change}'({}^\wedge m)$
(xii)	$\lambda X[X(m)](\lambda x[\text{walk}'(x)])$	$\text{walk}'(m)$

8.3 Berechne mindestens für (iii), (v) und (vi) von Aufgabe 8.2 den Wert explizit, relativ zu einer Modellstruktur M, einer Welt w, einem Zeitpunkt t und einer Belegung h.

8.4 In IL gilt, dass

${}^\vee{}^\wedge\alpha$ und α logisch äquivalent sind, ${}^\wedge{}^\vee\alpha$ und α nicht.

Verifiziere (durch Interpretation) die Äquivalenz im ersten Fall, und gib für den zweiten Fall ein Gegenbeispiel an!

8.1 Berechnung des Typs für Ausdrücke in IL.

Ausdruck	Typ	
1. $\text{walk}'_{\langle e,t\rangle}(j_e)$	t	Wahrheitswert
2. $\text{change}'_{\langle\langle s,e\rangle,t\rangle}({}^\wedge j_e)$	t	—"—
3. $\lambda x_e[\text{walk}'(x)]_t$	$\langle e,t\rangle$	Menge von Individuen
4. $\lambda r_{\langle s,e\rangle}[\text{rise}'(r)]_t$	$\langle\langle s,e\rangle,t\rangle$	Mengen von Individuen-Konzepten
5. $\lambda Q_{\langle\langle s,e\rangle,t\rangle}[Q = \text{rise}']_t$	$\langle\langle\langle s,e\rangle,t\rangle,t\rangle$	Menge von Mengen von Individuen-Konzepten
6. $\lambda P_{\langle s,\langle e,t\rangle\rangle}[P = {}^\wedge\text{walk}'_{\langle e,t\rangle}]_t$	$\langle\langle s,\langle e,t\rangle\rangle,t\rangle$	Menge von Eigenschaften von Individuen
7. $\underbrace{{}^\vee P_{\langle s,\langle e,t\rangle\rangle}}_{\langle e,t\rangle}(\underbrace{{}^\vee{}^\wedge j_e}_{e})$	t	Wahrheitswert
8. $\lambda P_{\langle s,\langle e,t\rangle\rangle}[{}^\vee P(j)]_t$	$\langle\langle s,\langle e,t\rangle\rangle,t\rangle$	Menge von Eigenschaf

Ausdruck	Typ	
9. $\lambda x_e [Sq(x)]_e$	$\langle e,e \rangle$	Funktion von Individuen in Individuen
10. $^\wedge[\lambda x_e[Gr(3)(x)]]_t$	$\langle s,\langle e,t\rangle\rangle$	Eigenschaft von Individuen
11. $\lambda p_{\langle s,t\rangle}[{}^\vee p = \Box rise'(^\wedge j)]_t$	$\langle\langle s,t\rangle,t\rangle$	Menge von Propositionen
12. $\lambda x_e[\lambda p_{\langle s,t\rangle}[{}^\vee p = change'(^\wedge x)]_t]$	$\langle e,\langle\langle s,t\rangle,t\rangle\rangle$	Relation zwischen Propositionen u. Indiv.
13. $^{\wedge\vee} r$	$\langle s,e\rangle$	Individuenkonzept
14. $^{\vee\wedge} rise'$	$\langle\langle s,e\rangle,t\rangle$	Menge von Ind.Konzept.
15. $\lambda x_e[R(x_e)(\underbrace{Sq(x)}_{e})]_t$	$\langle e,t\rangle$	Menge von Individuen

8.2 Bestimme, ob die Formelpaare äquivalent sind.

(i) $j = {}^{\vee\wedge}j$ ja! $^{\vee\wedge}$-cancellation

(ii) $B(j) = \lambda x[B(x)](j)$ ja! β-Reduktion okay, da kein freies Vorkommen von x in B(x) im Skopus von □, ◇ oder ^.

(iii) $\Box B(m) = \lambda x[\Box B(x)](m)$ nein! da ein freies Vorkommen von x in □B(x) im Skopus von □.

(iv) $\lambda P[{}^\vee P(j)](^\wedge walk') = walk'(j)$ ja! β-Reduktion okay, da ^walk' ein ICE

(v) $\exists r\, walk'({}^\vee r) = \exists x\, walk'(x)$ ja!
Begründung s. 8.3

(vi) $\exists r\, change'(r) = \exists x\, change'(^\wedge x)$ nein!
Begründung s. 8.3

(vii) $L(j)(m) = L(m,j)$ ja! Notationelle Konvention.

(viii) $\lambda x[\lambda y[Gr(y,x)](3)](2) = \lambda x[\lambda y[Gr(y,x)]](3)(2)$

$\lambda x[Gr(3,x)](2)$ $\lambda y[Gr(y,3)](2)$

$Gr(3,2)$ $Gr(2,3)$

also nein!

(ix) $\lambda p[\Box{}^\vee p](^\wedge change'(^\wedge m)) = \Box change'(^\wedge m)$ ja!

$\Box {}^{\vee\wedge} change'(^\wedge m)$ β-Reduktion okay, da Argument ein ICE

$\Box change'(^\wedge m)$ $^{\vee\wedge}$-cancellation.

(x) $\lambda P[{}^\vee P(m)](^\wedge\lambda x[walk'(x)]) = walk'(m)$ ja!

$^{\vee\wedge}\lambda x[walk'(x)](m)$ β-Reduktion okay, da Argument ein ICE

$\lambda x[walk'(x)](m)$ $^{\vee\wedge}$ cancellation

$walk'(m)$ β-Reduktion (oder auch η-Reduktion)

(xi) $\lambda Q[Q(^\wedge m)](\lambda r[change'(r)]) = change'(^\wedge m)$ ja!

$\lambda r[change'(r)](^\wedge m)$ β-Reduktion okay da Q in Q(m) nicht im Skopus eines int. Operators

$change'(^\wedge m)$ β-Reduktion möglich, da ^m ein ICE

(xii) $\lambda X[X(m)](\lambda x[walk'(x)]) = walk'(m)$ ja!

$\lambda x[walk'(x)](m)$ β-Red. okay, da X in X(m) nicht im Skopus eines int. Operators

$walk'(m)$ β-Red. okay (auch η-Reduktion)

8.3 Berechne den Wert von (iii), (v) und (vi) aus Aufgabe 8.2 relativ zu M, w, t und h.

$[\![\Box B(m)]\!]^{M,w,t,h} = 1$ gdw

in jeder Welt w' und zu jedem Zeitpunkt t' gilt

$$[\![B]\!]^{M,w',t',h}\left([\![m]\!]^{M,w',t',h}\right) = 1 \quad \text{gdw}$$

in jeder Welt w' und Zeitpunkt t' gilt

$$V(B)(\langle w',t'\rangle)\Big(V(m)(\langle w',t'\rangle)\Big) = 1$$

$[\![\lambda x[\Box B(x)](m)]\!]^{M,w,t,h} = 1$ gdw

$$[\![\lambda x[\Box B(x)]]\!]^{M,w,t,h}\left([\![m]\!]^{M,w,t,h}\right) = 1 \quad \text{gdw}$$

diejenige Funktion $f \in \{0,1\}^U$, so dass für alle $d \in U$ gilt für alle w', t' gilt $V(B)(\langle w',t'\rangle)(d) = 1$

angewandt auf

$V(m)(\langle w,t\rangle)$

für alle w', t' gilt: $V(B)(\langle w',t'\rangle)\Big(V(m)(\langle w,t\rangle)\Big) = 1$

$M = \langle U = \{H., P.\}, W = \{w_1\}, T = \{t_1 < t_2\}, V \rangle$

	m	B
$\langle w_1,t_1\rangle$	H.	{H.}
[illegible]	P	{P}

$\Box B(m)$ ist wahr in M an $\langle w_1,t_1\rangle$, aber $\lambda x[\Box B(x)](m)$ ist falsch in M an $\langle w_1,t_1\rangle$.

8.3 (Fortsetz.)

(v) aus 8.2

(a) $[\![\exists r\, walk'({}^{\vee}r)]\!]^{M,w,t,h} = 1$ gdw

es gibt ein Individuenkonzept $f \in U^{W\times T}$, so dass das Individuum $f(\langle w,t\rangle)$ in der Extension von 'walk'' am Index $\langle w,t\rangle$ ist, d.h. $f(\langle w,t\rangle) \in V(walk')(\langle w,t\rangle)$.

(b) $[\![\exists x\, walk'(x)]\!]^{M,w,t,h} = 1$ gdw

es gibt ein Individuum $d \in U$ so dass $d \in V(walk')(\langle w,t\rangle)$.

Die Richtung (a) $\models$ (b) ist klar! Denn $f(\langle w,t\rangle)$ ist ja solch ein Individuum $d \in U$.

Nun zur Richtung (b) $\models$ (a).

Wenn es also ein Individuum $d \in U$ gibt, so dass $d \in V(walk')(\langle w,t\rangle)$, dann gibt es natürlich auch ein Individuenkonzept $f \in U^{W\times T}$, so dass $f(\langle w,t\rangle) \in V(walk')(\langle w,t\rangle)$.

Man nehme für f nur ein Individuenkonzept für das gilt

$\langle w_1,t_1\rangle$	-
$\langle w_1,t_2\rangle$	-
⋮	⋮
⋮	⋮
$\langle w,t\rangle$	d
⋮	⋮

, so dass also $f(\langle w,t\rangle) = d$ ist.

8.3 (Fortsetz.)

(vi) aus 8.2

(a) $[\![\exists r\, change'(r)]\!]^{M,w,t,h} = 1$ gdw

es gibt ein Individuenkonzept $f \in U^{W\times T}$ so dass $f \in V(change')(\langle w,t\rangle)$.

(b) $[\![\exists x\, change'({}^{\wedge}x)]\!]^{M,w,t,h} = 1$ gdw

es gibt ein Individuum $d \in U$ so dass das "konstante" Individuenkonzept f:

$\langle w_1,t_1\rangle$	d
$\langle w_1,t_2\rangle$	d
	d
⋮	⋮
$\langle w_n,t_m\rangle$	d

$\in V(change')(\langle w,t\rangle)$

Es kann aber durchaus sein, dass (a) wahr ist, während (b) falsch ist. Denn es kann sein, dass es ein Individuenkonzept $f \in U^{W\times T}$ gibt, das in der Extension von change' am Index $\langle w,t\rangle$ ist, ohne dass dieses f ein "konstantes" Individuenkonzept ist.

Gegenbeispiel:

V	change'
$\langle w_1,t_1\rangle$	$\left\{ \begin{array}{\|c\|c\|}\hline \langle w_1,t_1\rangle & H. \\ \hline \langle w_1,t_2\rangle & P. \\ \hline \end{array} \right\}$
$\langle w_1,t_2\rangle$	

Hier, d.h. an $\langle w_1,t_1\rangle$ ist (a) wahr, aber (b) falsch!

8.4. Zeige, dass ${}^{\vee\wedge}\alpha = \alpha$ (α Ausdruck bel. Typs)

aber, dass i.A. ${}^{\wedge\vee}\alpha \neq \alpha$. ($\alpha \in ME_{\langle s,\tau\rangle}$)

1. ${}^{\vee\wedge}\alpha = \alpha$ $\quad \alpha \in ME_\tau$

$$[\![{}^{\vee\wedge}\alpha]\!]^{M,w,t,h} = \underbrace{[\![{}^{\wedge}\alpha]\!]^{M,w,t,h}}(\langle w,t\rangle)$$

das ist diejenige Funktion f in $D_\tau^{W\times T}$ so dass für alle $\langle w',t'\rangle$ gilt $f(\langle w',t'\rangle) = [\![\alpha]\!]^{M,w',t',h}$

angewandt auf

$$f(\langle w,t\rangle) = [\![\alpha]\!]^{M,w,t,h}$$

Also $[\![{}^{\vee\wedge}\alpha]\!]^{M,w,t,h} = [\![\alpha]\!]^{M,w,t,h}$

2. "Gegenbeispiel" für ${}^{\wedge\vee}\alpha = \alpha$.

	r	${}^{\vee}r$	${}^{\wedge\vee}r$
$\langle w_1,t_1\rangle$	$\begin{array}{\|c\|c\|}\hline \langle w_1,t_1\rangle & H. \\ \hline \langle w_1,t_2\rangle & P. \\ \hline \end{array}$	H.	$\begin{array}{\|c\|c\|}\hline \langle w_1,t_1\rangle & H. \\ \hline \langle w_1,t_2\rangle & H. \\ \hline \end{array}$
$\langle w_1,t_2\rangle$	$\begin{array}{\|c\|c\|}\hline \langle w_1,t_1\rangle & P. \\ \hline \langle w_1,t_2\rangle & H. \\ \hline \end{array}$	H.	$\begin{array}{\|c\|c\|}\hline \langle w_1,t_1\rangle & H. \\ \hline \langle w_1,t_2\rangle & H. \\ \hline \end{array}$

Dies zeigt dass

$\boxed{{}^{\wedge\vee}r \neq r}$

Werner Saurer

WS

Einführung in die Semantik

Übungsblatt Nr. 9

MUSTERLÖSUNGEN

9.1 Berechne für alle Kategorien des Fragments II welcher IL-Typ ihnen entspricht.

Kategorie		Typ
S	$\rightarrow$	t
CN		$\langle et\rangle$
IV		$\langle et\rangle$
T = S/IV	$\langle\langle s, f(IV)\rangle, f(S)\rangle$	$\langle\langle s\langle et\rangle\rangle t\rangle$
DET = (S/IV)/CN	$\langle\langle s\, f(CN)\rangle, \langle\langle s\, f(IV)\rangle, f(S)\rangle\rangle$	$\langle\langle s\langle et\rangle\rangle\langle\langle s\langle et\rangle\rangle t\rangle\rangle$
S/S		$\langle\langle st\rangle t\rangle$
IV/S	$\rightarrow$	$\langle\langle st\rangle\langle et\rangle\rangle$
CN/CN	$\rightarrow$	$\langle\langle s\langle et\rangle\rangle\langle et\rangle\rangle$

(2)

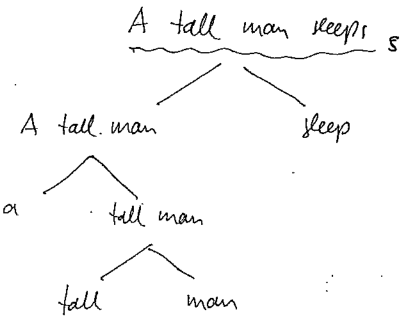
9.2 Formuliere Grammatik- und Übersetzungsregel für Konstruktionen wie $\underset{CN/CN}{\text{large}}\ \text{man}_{CN}$

S6. Wenn $\zeta \in P_{CN/CN}$ und $\delta \in P_{CN}$, so ist $F_6(\zeta,\delta) \in P_{CN}$, wobei $F_6(\zeta,\delta) = \zeta\delta$ (einfache Verkettung).

T6. Wenn $\zeta \in P_{CN/CN}$, $\delta \in P_{CN}$, $\zeta \Rightarrow \zeta'$, $\delta \Rightarrow \delta'$, dann $F_6(\zeta,\delta) = \zeta'({}^\wedge\delta')$.

Weil es ja auch intensionale Adjektive geben kann.

9.3 Analysiere u. übersetze mithilfe der Regel aus 9.2:



9.3 (contin.)

$$\text{tall man} \Rightarrow tall'({}^\wedge man')$$

$$\text{a tall man} \Rightarrow \lambda F \lambda G\, \exists x[{}^\vee F(x) \wedge {}^\vee G(x)]\,({}^\wedge tall'({}^\wedge man'))$$

$$\Leftrightarrow \lambda G\, \exists x[{}^{\vee\wedge} tall'({}^\wedge man')(x) \wedge {}^\vee G(x)]$$

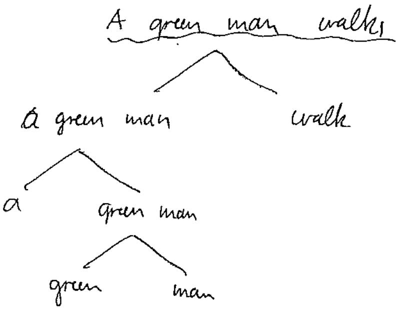
$$\text{a tall man sleeps} \Rightarrow \lambda G\, \exists x[tall'({}^\wedge man')(x) \wedge {}^\vee G(x)]\,({}^\wedge sleep$$

$$\Leftrightarrow \exists x[tall'({}^\wedge man')(x) \wedge {}^\vee{}^\wedge sleep'(x)]$$

$$\Leftrightarrow \exists x[tall'({}^\wedge man')(x) \wedge sleep'(x)]$$

9.4 Gib für das Adjektiv <u>green</u> statt <u>green'</u> eine IL-Übersetzung mithilfe des Standardprädikats <u>green*</u> $\langle et \rangle$ Analysiere und übersetze:

$$green \Rightarrow \lambda F \lambda x[green^*(x) \wedge {}^\vee F(x)]$$



<u>green man</u> $\Rightarrow \lambda F \lambda x[green^*(x) \wedge {}^\vee F(x)](^\wedge man')$

$\lambda x[green^*(x) \wedge {}^{\vee\wedge} man'(x)]$

$\lambda x[green^*(x) \wedge man'(x)]$

a green man walks. $\Rightarrow \lambda F \lambda G \exists x[{}^\vee F(x) \wedge {}^\vee G(x)](^\wedge \lambda x[green^*(x) \wedge man'(x)])(^\wedge walk')$

$\Leftrightarrow \lambda G \exists x[{}^{\vee\wedge}\lambda x[green^*(x) \wedge man'(x)](x) \wedge {}^\vee G(x)](^\wedge walk')$

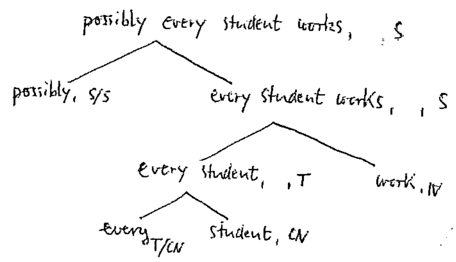
$\Leftrightarrow \exists x[\lambda x[green^*(x) \wedge man'(x)](x) \wedge {}^{\vee\wedge} walk'(x)]$

$\Leftrightarrow \boxed{\exists x[(green^*(x) \wedge man'(x)) \wedge walk'(x)]}$

9.5) possibly $\in B_{S/S}$

<u>Übersetzung:</u> possibly $\Rightarrow \lambda p[\Diamond {}^\vee p]$ wobei $p \in Var_{\langle s,t \rangle}$

<u>De dicto - Analyse:</u>



<u>Übersetzung (de dicto):</u>

every student works $\Rightarrow \forall x[student'(x) \rightarrow work'(x)]$ (siehe Skript, analog zu Beisp. 8)

possibly every student works

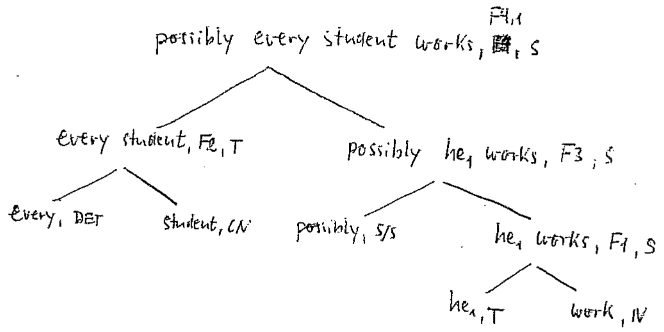
$\Rightarrow \lambda p[\Diamond {}^\vee p](^\wedge \forall x[student'(x) \rightarrow work'(x)])$

$\xrightarrow{\beta\text{-Red.}} \Diamond {}^{\vee\wedge} \forall x[student'(x) \rightarrow work'(x)]$

$\xrightarrow{{}^{\vee\wedge}\text{-canc.}} \underline{\underline{\Diamond \forall x[student'(x) \rightarrow work'(x)]}}$

9.5 (Fortsetzung)

<u>de re - Analyse:</u>



<u>Übersetzung (de re Analyse):</u>

he$_1$ works $\Rightarrow work'(x_1)$

possibly he$_1$ works $\Rightarrow \lambda p[\Diamond {}^\vee p](^\wedge work'(x_1))$

$\xrightarrow{\beta\text{-Red.}} \Diamond {}^{\vee\wedge} work'(x_1)$

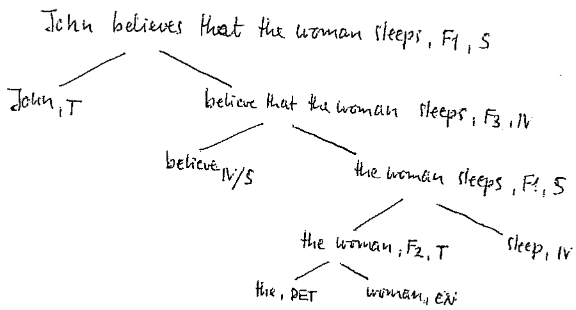
$\xrightarrow{{}^{\vee\wedge}\text{-canc.}} \Diamond work'(x_1)$

~~Every~~ possibly every student works

$\Rightarrow \lambda G[\forall x[student'(x) \rightarrow {}^\vee G(x)]](^\wedge \lambda x_1[\Diamond work'(x_1)])$

$\xrightarrow{\beta\text{-Red.}} \forall x[student'(x) \rightarrow {}^{\vee\wedge}\lambda x_1[\Diamond work'(x_1)](x)]$

9.6) <u>de dicto - Lesart (Analysebaum):</u>



<u>Übersetzung in IL (de dicto):</u>

the $\Rightarrow \lambda F[\lambda G[\exists x[\forall y[{}^\vee F(y) \leftrightarrow y=x] \wedge {}^\vee G(x)]]]$

the woman $\Rightarrow \lambda F[\lambda G[\exists x[\forall y[{}^\vee F(y) \leftrightarrow y=x] \wedge {}^\vee G(x)]]](^\wedge woman')$

$\xrightarrow{\beta\text{-Red.} + {}^{\vee\wedge}\text{canc.}} \lambda G[\exists x[\forall y[woman'(y) \leftrightarrow y=x] \wedge {}^\vee G(x)]]$

the woman sleeps $\Rightarrow \lambda G[\exists x[\forall y[woman'(y) \leftrightarrow y=x] \wedge {}^\vee G(x)]](^\wedge sleep')$

$\xrightarrow{\beta\text{-Red} + {}^{\vee\wedge}\text{canc.}} \exists x[\forall y[woman'(y) \leftrightarrow y=x] \wedge sleep'(x)]$

believe that the woman sleeps

$\Rightarrow believe'(^\wedge \exists x[\forall y[woman'(y) \leftrightarrow y=x] \wedge sleep'(x)])$

John believes that the woman sleeps

$\Rightarrow \lambda F[{}^\vee F(j^*)](^\wedge believe'(^\wedge \exists x[\forall y[woman'(y) \leftrightarrow y=x] \wedge sleep'(x)]))$

$\xrightarrow{\beta\text{-Red} + {}^{\vee\wedge}\text{canc.}} believe'(^\wedge \exists x[\forall y[woman'(y) \leftrightarrow y=x] \wedge sleep'(x)])(j^*)$

9.6 (Fortsetzung)

de re - Lesart (Analysebaum):

- John believes that the woman sleeps, F4,0, S
  - the woman, F_2, T
  - John believes that he_0 sleeps, F_1, S
    - John, T
    - believe that he_0 sleeps, F3, IV
      - believe, IV/S
      - he_0 sleeps, F_1
        - he_0, T
        - sleep, I

Übersetzung in IL (de re):

he_0 sleeps $\Rightarrow$ $sleep'(x_0)$

believe that he_0 sleeps $\Rightarrow$ $believe'({}^\wedge sleep'(x_0))$

John believes that he_0 sleeps $\Rightarrow$ $\lambda F[{}^\vee F(j^*)]({}^\wedge believe'({}^\wedge sleep'(x_0)))$

$\xrightarrow{\beta\text{-Red.} + {}^{\vee\wedge}\text{canc.}}$ $believe'({}^\wedge sleep'(x_0))(j^*)$

$\xrightarrow{\text{Notat. Konvent.}}$ $believe'(j^*, {}^\wedge sleep'(x_0))$

John believes that the woman sleeps

$\Rightarrow \lambda G[\exists x[\forall y[woman'(y) \leftrightarrow y=x] \wedge {}^\vee G(x)]]({}^\wedge\lambda x_0[believe'(j^*, {}^\wedge sleep'(x_0))])$

$\xrightarrow{\text{Red.} + {}^{\vee\wedge}\text{canc.}}$ $\exists x[\forall y[woman'(y) \leftrightarrow y=x] \wedge {}^{\vee\wedge}\lambda x_0[believe'(j^*, {}^\wedge sleep'(x_0))](x)$

$\xrightarrow{\text{canc.} + \beta\text{-Red.}}$ $\exists x[\forall y[woman'(y) \leftrightarrow y=x] \wedge believe'(j^*, {}^\wedge sleep'(x))]$