

Vorlesung: Einführung in die Semantik

Übungsblatt 3

3.1 Überführe mit Hilfe der in der Vorlesung vorgestellten Äquivalenzen jeweils (1) in (2).

1. $((A \vee (B \vee C)) \wedge (C \vee \neg A))$
2. $((B \wedge \neg A) \vee C$

1. $((A \vee \neg(B \wedge A)) \wedge (C \vee (D \vee C)))$
2. $C \vee D$

3.2 Überführe die folgenden Formeln jeweils in konjunktive und disjunktive Normalform.

1. $(A \wedge \neg B) \vee ((B \vee \neg C) \wedge (C \vee A))$
2. $\neg((A \vee B) \wedge (B \vee C) \wedge D \wedge E)$

3.3 Überführe die folgenden Formeln in pränex Normalform, den Körper der PNF-Formeln anschliessend in KNF-Formeln.

1. $\forall y(\neg \forall x P(x,y) \vee \forall x R(x,y))$
2. $\forall x \exists y P(x,y) \leftrightarrow \exists x \forall y R(x,y)$
3. $\forall x \forall y \exists z ((P(x,y) \wedge P(y,z)) \rightarrow \neg P(x,z))$
4. $\forall x (\exists y Q(x,y) \vee \forall y \exists z (R(x,y,z)))$
5. $\forall x (\neg \forall y \neg \forall z (P(y,z) \vee \neg \exists y (\forall z Q(x,y,z) \rightarrow \neg P(x,y))))$
6. $\exists x \exists y ((on(x,y) \wedge \exists z on(y,z)) \rightarrow \neg \exists z puton(z,y))$

Hinweis:

In $\exists x(P(x) \wedge \forall x Q(x))$ darf nicht entsprechend $A \wedge \forall x F(x) \equiv \forall x(A \wedge F(x))$ umgeformt werden, da x frei in A (hier = $P(x)$) vorkommt. Man kann hier die Äquivalenzen

$$\begin{aligned} \exists x A &\equiv \exists y A[x/y] \quad \text{und} \\ \forall x A &\equiv \forall y A[x/y] \end{aligned}$$

ausnutzen und Variablenkonflikte durch Substituieren einer neuen Variablen vermeiden, also:

$$\begin{aligned} &\exists x(P(x) \wedge \forall x Q(x)) \\ \text{zu} &\quad \exists y(P(y) \wedge \forall x Q(x)) \\ \text{zu} &\quad \exists y \forall x (P(y) \wedge Q(x)) \end{aligned}$$

Es ist sinnvoll, vor allen anderen Umformungen die Formeln so zu bereinigen, dass alle Quantoren verschiedene Variablen binden.