PO Sets and Lattices

partiell geordnete Mengen (Teilordnungen, Verbände

und Verbände von Merkmalstermen

Hans Uszkoreit

Partiell-geordnete Mengen (Posets)

Definition:

Eine partiell-geordnete Menge (partially ordered set, poset) ist eine Menge P mit einer Ordnungsrelation "kleiner gleich", die reflexiv, transitiv, antisymmetrisch; aber nicht notwendig total ist.

Verband

Definition:

Sei (V , "kleiner gleich") eine Menge V mit einer partiellen Ordnung "kleiner gleich" und zu x, y Elemente aus V existiere stets das Infimum (greatest lower bound)

inf(x,y) = größte untere Schranke z von x und y, d. h. z Element aus V mit

1) z "kleiner gleich" x, z "kleiner gleich" y, so daß

2) z' "kleiner gleich" z für jedes z' Element aus V mit z' "kleiner gleich" x, z' "kleiner gleich" y,

und das Supremum (least upper bound):

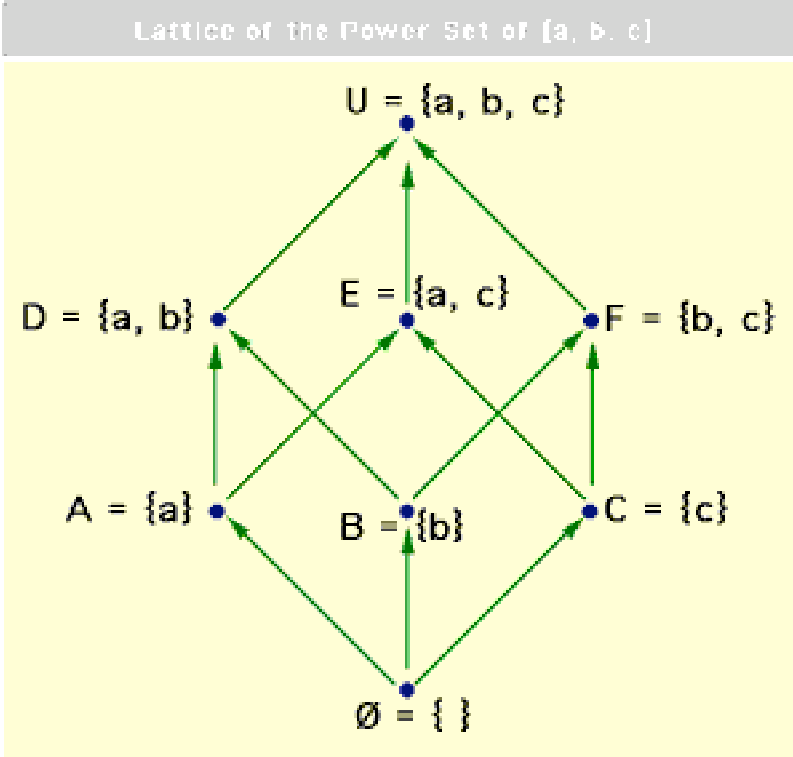
sup(x,y) = kleinste obere Schranke u von x und y, d. h. u Element aus V mit

1) x "kleiner gleich" u, y "kleiner gleich" u, so daß

2) u "kleiner gleich" u' für jedes u' Element aus V mit x "kleiner gleich" u', y "kleiner gleich" u'.

Dann heißt (V , "kleiner gleich") ein Verband.

Beispiel: Teilmengenverband



A lattice defined by the relation $\subseteq$ on sets satisfies the following requirements for a lattice:

(1) $A \subseteq A$; — Reflexive
(2) if $A \subseteq B$ and $B \subseteq A$, then $A = B$; — Antisymmetric
(3) if $A \subseteq B$ and $B \subseteq C$, then $A \subseteq C$; — Transitive
(4) A and B have a (unique) least upper bound, $A \cup B$;
(5) A and B have a (unique) greatest lower bound, $A \cap B$

Set Algebra and Subset Lattice

Algebra of Sets

Assume that we have a set U of which all other sets are subsets and the null set, $\emptyset$. Let A' indicate the complement of A. Then we have the following identities:

(1)	$A \cup A = A$	(1') $A \cap A = A$	idempotent
(2)	$A \cup B = B \cup A$	(2') $A \cap B = B \cap A$	commutative
(3)	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	(3') $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	associative
(4)	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (B \cup C)$	(4') $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	distributive
(5)	$A \cup \emptyset = A$	(5') $A \cap U = A$	identity
(6)	$A \cup A' = U$	(6') $A \cap A' = \emptyset$	
(7)	$U' = \emptyset$	(7') $\emptyset' = U$	
(8)	$U \cup A = U$	(8') $\emptyset \cap A = \emptyset$	
(9)	$(A')' = A$		

A lattice defined by the relation $\subseteq$ on sets satisfies the following requirements for a lattice:

(1) $A \subseteq A$;
(2) if $A \subseteq B$ and $B \subseteq A$, then $A = B$;
(3) if $A \subseteq B$ and $B \subseteq C$, then $A \subseteq C$;
(4) A and B have a (unique) least upper bound, $A \cup B$;
(5) A and B have a (unique) greatest lower bound, $A \cap B$

Reflexive
Antisymmetric
Transitive

Correspondence Between the Algebra of Propositional Logic and the Algebra of Sets

$p \vee q \cong q \vee p$	$A \cup B = B \cup A$
$\neg(\neg p) \cong p$	$(A')' = A$
$\neg(p \vee q) \cong (\neg p) \wedge (\neg q)$	$(A \cup B)' = A' \cap B'$
$p \wedge (q \vee r) \cong (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
$p \vee (\neg p) \cong u$	$A \cup A' = U$
$u \vee p \cong u$	$U \cup A = U$
$u \wedge p \cong p$	$U \cap A = A$
$p \wedge (\neg p) \cong \phi$	$A \cap A' = \emptyset$
$\phi \vee p \cong p$	$\emptyset \cup A = A$

Operations join and meet

Some properties of $\cup$ (join) and $\cap$ (meet):

$A \cup B = B \cup A$ and $A \cap B = B \cap A$	Commutative
$A \cup A = A$ and $A \cap A = A$	Idempotent
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ and $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	Associative
for U, the highest element of the lattice, for elements A of the lattice: $U \cap A = A \cap U = A$	Identity of Intersection
for Z, the lowest element of the lattice, for elements A of the lattice: $Z \cup A = A \cup Z = A$	Identity of Union

A lattice is called a modular lattice if, for all points A, B, and C of the lattice such that $C \subseteq A$, we have: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$

Algebren für Mengenehre und Aussagenlogik

$A \cup B = B \cup A$	$p \lor q \equiv q \lor p$
$\bar{\bar{A}} = A$	$\neg(\neg p) \equiv p$
$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$	$\neg(p \lor q) \equiv \neg p \land \neg q$
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$p \lor (q \land r) \equiv (p \lor q) \land (p \lor r)$
$A \cup \bar{A} = U$	$p \lor \neg p \equiv \boldsymbol{w}$
$U \cup A = U$	$\boldsymbol{w} \lor p \equiv \boldsymbol{w}$
$U \cap A = A$	$\boldsymbol{w} \land p \equiv p$
$A \cap \bar{A} = \emptyset$	$p \land \neg p \equiv \boldsymbol{f}$
$\emptyset \cup A = A$	$\boldsymbol{f} \lor p \equiv p$

Verband von Merkmalstermen

Die Ordnungsrelation ist die Subsumtion (Subsumption)

$t_1 \sqsubseteq t_2$ bedeutet, dass t_1 t_2 subsumiert, das heißt, t_2 enthält mindestens die Information, die in t_1 enthalten ist.

T ist das Element "top", ein Merkmalsterm ohne jegliche Information.

T subsumiert alle anderen Merkmalsterme.

□ ist das Element "bottom", ein Merkmalsterm mit inkonsistenter (zu viel) Information.

□ wird von allen anderen Merkmalstermen subsumiert.

$t_1 \quad t_2$ ist die Unifikation von t1 und t2, die größte untere Schranke (Infimum)

$t_1 \quad t_2$ ist die Disjunktion von t1 und t2, die kleinste obere Schranke (Supremum)

Algebren für Mengen und für Merkmalsterme

$A \cup B = B \cup A$

$\bar{\bar{A}} = A$

$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$A \cup \bar{A} = U$

$U \cup A = U$

$U \cap A = A$

$A \cap \bar{A} = \varnothing$

$\varnothing \cup A = A$

$t_1 \sqcap t_2 = t_2 \sqcap t_1$

$\neg(\neg t_1) = t_1$

$\neg(t_1 \sqcap t_2) = (\neg t_1) \sqcup (\neg t_2)$

$t_1 \sqcup (t_2 \sqcap t_3) = (t_1 \sqcup t_2) \sqcap (t_1 \sqcup t_3)$

$t_1 \sqcap (\neg t_1) = \mathrm{T}$

$\mathrm{T} \sqcap t_1 = \mathrm{T}$

$\mathrm{T} \sqcup t_1 = t_1$

$t_1 \sqcup (\neg t_1) = \bot$

$\bot \sqcap t_1 = t_1$