# Programmierkurs Python II

Stefan Thater & Michaela Regneri
FR 4.7 Allgemeine Linguistik (Computerlinguistik)
Universität des Saarlandes

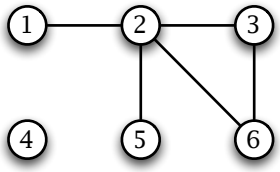
Sommersemester 2011

## Heute ...

- Ein wenig Graph-Theorie (in aller Kürze)
- Datenstrukturen für Graphen
- Tiefen- und Breitensuche
- Nächste Woche: mehr Algorithmen

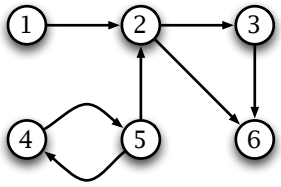
# Was ist ein Graph?

Graphen kann man sich als Mengen von Knoten („Ecken“, nodes, vertices) vorstellen, die über Kanten (edges) verbunden sind

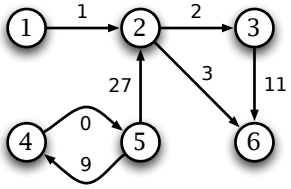



Varianten:

- *gerichtete* Graphen
  (Kanten haben eine Richtung)




- *gewichtete* Graphen
  (Kanten haben Gewichte)




- […]



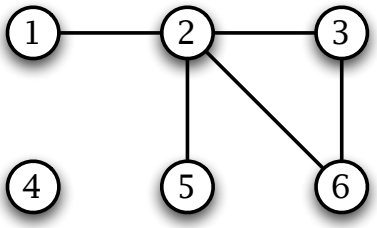
# Ungerichteter (undirected) Graph

Ein ungerichteter Graph ist ein Paar (V, E) mit

- **V** eine Menge von Knoten
- **E** ⊆ $[V]^2$ eine Menge von Kanten (edges)

Zum Beispiel:

- V = { 1, 2, 3, 4, 5, 6 }
- E = { {1, 2}, {2, 3}, {2, 5},
  {2, 6}, {3, 6} }



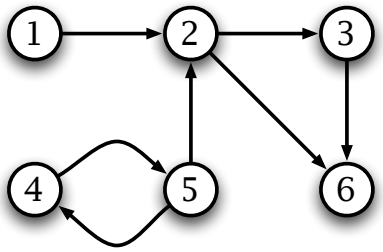
# Gerichteter (directed) Graph

Ein gerichteter Graph ist ein Paar (V, E) mit

- V eine Menge von Knoten
- E ⊆ V x V eine Menge von Kanten

Zum Beispiel:

- V = { 1, 2, 3, 4, 5, 6 }
- E = { (1, 2), (2, 3), (5, 2), (2, 6), (3, 6), (4, 5), (5, 4) }






# Inzident, adjazent

- Ein Knoten v ist mit einer Kante e inzident wenn v von e berührt wird (also Start- oder Endknoten von e ist).
- Zwei Knoten sind adjazent (benachbart), wenn sie über eine Kante verbunden sind.
- Der Grad eines Knotens = Anzahl inzidenter Kanten
- In gerichteten Graphen:
  - Eingangsgrad = Anzahl eingehender Kanten
  - Ausgangsgrad = Anzahl ausgehender Kanten

# Pfade und Zyklen
## (pathes and cycles)

- Ein Pfad ist eine Knotenfolge $v_1, \ldots, v_n$, so dass gilt: es gibt Kante $(v_i, v_{i+1})$, für alle $1 \leq i < n$
- Ein Pfad ist ein Zyklus, falls Start- und Endknoten identisch sind.
- Ein Pfad ist einfach, falls alle Knoten auf dem Pfad paarweise verschieden sind.
- Ein Graph heißt zyklisch, wenn er einen Zyklus enthält, ansonsten azyklisch.



# Teilgraphen
## (subgraphs)

- Ist $G = (V, E)$ ein Graph, dann ist $G' = (V', E')$ ein Teilgraph von G falls $V' \subseteq V$ und $E' \subseteq E$.
- Der Teilgraph G' heißt induziert (aufgespannt), wenn er alle Kanten $\{v_1, v_2\} \in E$ mit $v_1, v_2 \in V'$ enthält.
  - Notation: $G' = G[V']$

## Komponenten

- Ein Graph ist zusammenhängend (connected), wenn er für je zwei seiner Knoten einen Pfad enthält, der die Knoten verbindet.
- Ein maximal zusammenhängender Teilgraph eines Graphen G ist eine Komponente von G.



## Graphen als Datenstruktur

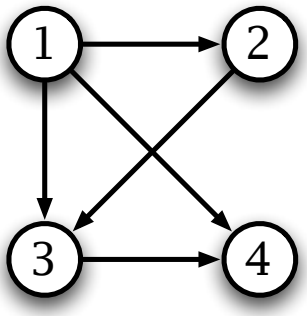
Graphen kann man auf verschiedene Weise als Datenstruktur repräsentieren:

- Adjazenzmatrix (Nachbarschaftsmatrix)
- Adjazenzliste (Nachbarschaftsliste)
- […]

# Adjazenzmatrix

|V| x |V| Matrix A

- A[i, j] = 1 wenn (i, j) ∈ E
- A[i, j] = 0 wenn (i, j) ∉ E



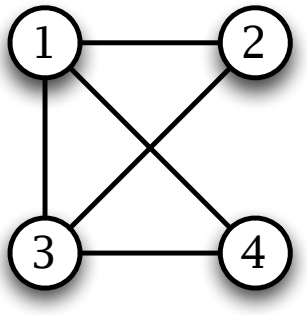

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 3 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 0 |



# Adjazenzmatrix

|V| x |V| Matrix A

- A[i, j] = 1 wenn {i, j} ∈ E
- A[i, j] = 0 wenn {i, j} ∉ E




| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 3 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 4 | 1 | 0 | 1 | 0 |

# Adjazenzmatrix

- |V| x |V| Matrix A
  - A[i, j] = 1 wenn (i, j) ∈ E
  - A[i, j] = 0 wenn (i, j) ∉ E
- O(|V|$^2$) Speicherplatz: gut geeignet für „dichte“ Graphen (|E| ≈ |V|$^2$)
- O(1) Zeit, um zu prüfen, ob (i, j) ∈ E



# ... in Python

```
class AdjacencyMatrix:
   def __init__(self, size):
      self.matrix = [ [ 0 ] * size for i in range(size) ]
   def add_edge(self, i, j):
      self.matrix[i][j] = 1
   def has_edge(self, i, j):
      return self.matrix[i][j]
   def edges(self):
      for (i, adj) in enumerate(self.matrix):
         for (j, b) in enumerate(adj):
            if b: yield (i, j)
   [...]
```

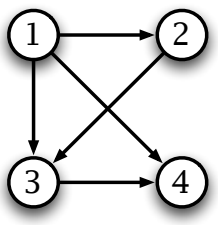
## Alternativ ...

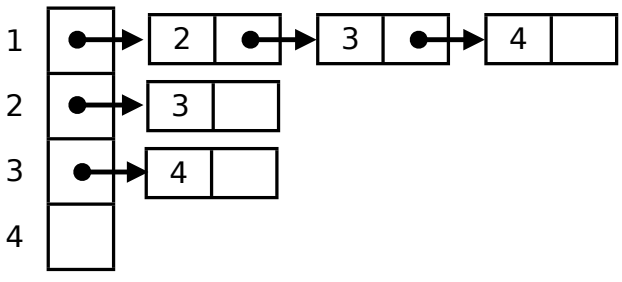
```
class AdjacencyMatrix:
   def __init__(self, size):
      self.matrix = [ 0 ] * (size * size)
      self.size = size
   def add_edge(self, i, j):
      self.matrix[(i * self.size) + j] = 1
   def has_edge(self, i, j):
      return self.matrix[(i * self.size) + j]
   def edges(self):
      for i in range(self.size):
         for j in range(self.size):
            if self.has_edge(i, j): yield (i, j)
   [...]
```



## Adjazenzlisten

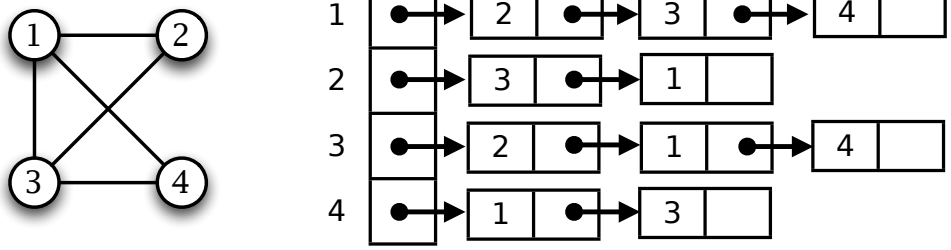
- Ein Array A von |V| Listen
- A[u] verweist auf alle adjazenten Knoten
- Python:
  - Array ≈ Liste fester Länge
  - Liste ≈ Liste variabler Länge (hier: verkettete Paare)



# Adjazenzlisten

- Ein Array A von |V| Listen
- A[u] verweist auf alle adjazenten Knoten
- Python:
  - Array ≈ Liste fester Länge
  - Liste ≈ Liste variabler Länge (hier: verkettete Paare)






# Adjazenzlisten

- Ein Array A von |V| Listen
- A[u] verweist auf alle adjazenten Knoten
- O(|V| + |E|) Speicherplatz: gut geeignet für „dünne“ Graphen (|E| ≈ |V|)
- O(|V|) Zeit, um zu prüfen, ob (i, j) ∈ E

## ... in Python

```
class AdjacencyList:
   def __init__(self, size):
      self.node_list = [ [] for i in range(size) ]
   def add_edge(self, i, j):
      if not self.has_edge(i, j):
         self.node_list[i].append(j)
   def has_edge(self, i, j):
      return j in self.node_list[i]
   def edges(self):
      for (i, adj) in enumerate(self.node_list):
         for j in adj:
            yield (i, j)
   [...]
```



## Graphen in Python

- Adjazenzlisten bzw. Matrizen sind nicht unbedingt die natürlichsten Datenstrukturen, um Graphen in Python zu implementieren.
- In Python bieten sich zwei Varianten an:
  - Graphen als Wörterbücher mit Mengen (oder Listen)
  - Graphen ganz objektorientiert (in Klassen aufgeteilt)
- Variante 1: ein Dictionary, das Knoten jeweils auf die Menge der adjazenten Knoten abbildet.
  - etwas langsamer, aber viel flexibler als die Matrizen
  - alle Datentypen, die als Schlüssel eines **`dict`** verwendet werden dürfen, können für Knoten stehen.

## Zum Beispiel so

```
class Graph:
   def __init__(self):
      self.nodes = dict()

   def add_edge(self, i, j):
      self.nodes[i] = self.nodes.get(i,set()) | set([j])

   def has_edge(self, i, j):
      return j in self.nodes.get(i, [])

   def edges(self):
       for (i, adj) in self.nodes.items():
          for j in adj:
             yield (i, j)
```

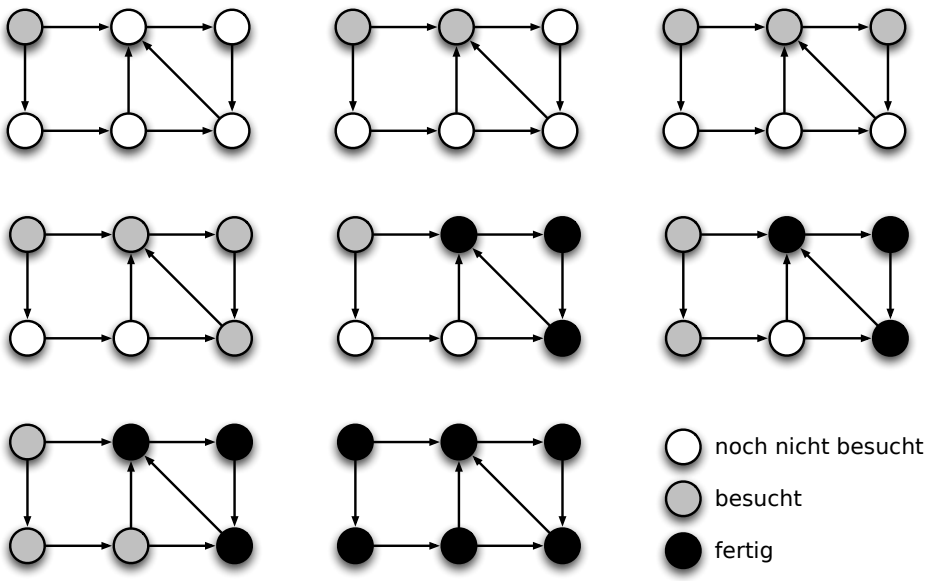


## Suche in Graphen

Besuche alle Knoten eines Graphen:

- Breitensuche – zuerst alle Geschwister besuchen
- Tiefensuche – erst alle Kinder-Knoten, dann die Geschwister

# Tiefensuche






# Tiefensuche

```
def nop(node): pass

def dfs(self, node, dosomething = nop):
     visited = set()
     stack = [node]
     while stack:
        node = stack.pop()
        if node not in visited:
           visited.add(node)
           dosomething(node)
           stack.extend(self.children(node))
  [...]
```

# Tiefensuche (Iterator)

```
class Graph(object):
   def dfs(self, node):
      visited = set()
      stack = [node]
      while stack:
         node = stack.pop()
         if node not in visited:
            visited.add(node)
            yield node
            stack.extend(self.children(node))
   [...]
```

```
for n in g.dfs(start):
   dosomething(n)
```



# Tiefensuche – Anwendungen

- Erreichbarkeit, transitiver Abschluss
- Untersuchung des Graphen auf Zyklen
- Zusammenhangskomponenten
- Topologische Sortierung
- […]

# Breitensuche

...wie Tiefensuche, nur mit einer „Warteschlange“ statt eines „Stapels“

- queue = []
- queue.append(elt)  # am Ende anhängen
- queue.remove(elt)  # von Anfang entfernen