

Programmierkurs Python II

Stefan Thater & Michaela Regneri
Universität des Saarlandes
FR 4.7 Allgemeine Linguistik (Computerlinguistik)



Übersicht

- Vektoren elementar
- Information Retrieval
- Semantische Ähnlichkeit
- Klassifikation (kNN)
- Cluster-Analyse (k-means)

Vektoren

- Vektoren entsprechen Listen reeller Zahlen:

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$$

- Vektoren können addiert werden:

$$\mathbf{v} + \mathbf{u} = (v_1 + u_1, \dots, v_n + u_n)$$

- Vektoren können mit reellen Zahlen („Skalaren“) multipliziert werden:

$$a\mathbf{u} = (au_1, \dots, au_n)$$

3

Vektorräume

- Ein Vektorraum über \mathbb{R} ist eine Menge V über der Addition und Skalarmultiplikation \cdot definiert sind


- die Additionsoperation muss folgende Bedingungen erfüllen:

- $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$

- $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$

- $\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$

- $\forall \mathbf{u} \exists \mathbf{v} \mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{0}$



- * Assoziativ
- * Kommutativ
- * neutrales Element
- * Inverses element

4

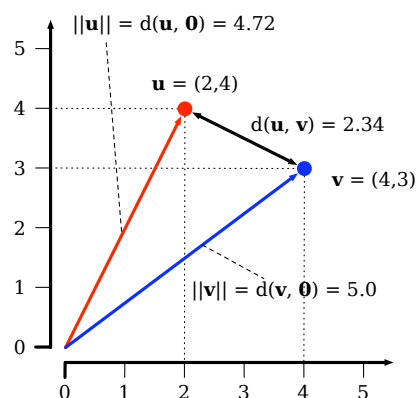
Vektorräume

- Ein Vektorraum über \mathbb{R} ist eine Menge von Vektoren mit Operationen Addition und Skalarmultiplikation.
- die Skalarmultiplikation muss folgende Bedingungen erfüllen:
 - $a(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = a\mathbf{v} + a\mathbf{w}$
 - $(a + b)\mathbf{v} = a\mathbf{v} + b\mathbf{v}$
 - $a(b\mathbf{v}) = (ab)\mathbf{v}$
 - $1\mathbf{v} = \mathbf{v}$

5

Geometrische Interpretation

- Vektoren beschreiben Punkte im Raum
- Euklidische Distanz:
$$d_2(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + \dots + (u_n - v_n)^2}$$
- Distanz $d_2(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \text{Länge } \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$ des Vektors $\mathbf{u} - \mathbf{v}$
$$\|\mathbf{u}\| = d_2(\mathbf{u}, \mathbf{0})$$



6

Geometrische Interpretation

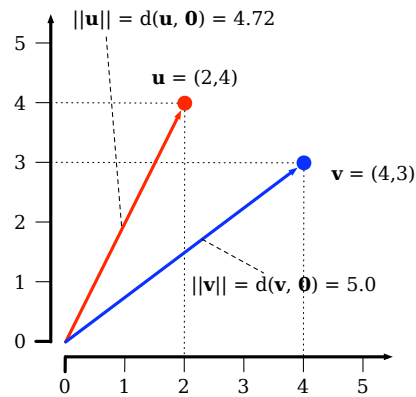
- Vektoren beschreiben Punkte im Raum
- Skalarprodukt (dot product, inner product):

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + \dots + u_nv_n$$

- Winkel φ zwischen Vektoren \mathbf{u} und \mathbf{v}

$$\cos \varphi = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} / \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$$

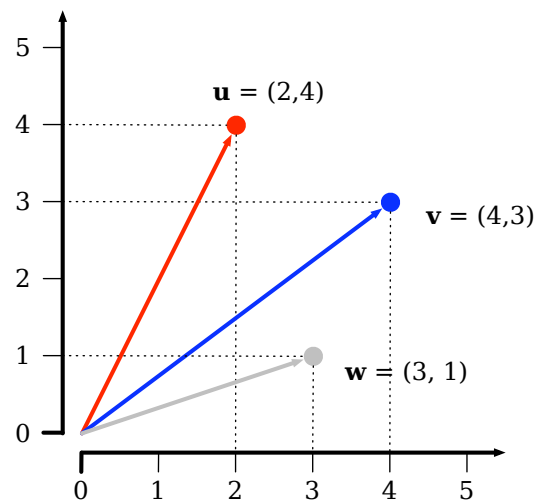
- φ als Distanzmaß
(Länge der Vektoren wird nicht berücksichtigt)



Geometrische Interpretation

- Vektoren beschreiben Punkte im Raum
- Centroid von Vektoren $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$

$$\mathbf{C} = (\mathbf{v}_1 + \dots + \mathbf{v}_k) / k$$



Vektoren in Python

```
class Vector:
    def __init__(self, data):
        self.data = [0] * data if isinstance(data, int) else data
    def __setitem__(self, idx, value):
        self.data[idx] = value
    def __getitem__(self, idx):
        return self.data[idx]
    def __add__(self, other):
        return Vector([x + y for (x, y) in zip(self.data, other.data)])
    def __mul__(self, scalar):
        return Vector([x * scalar for x in self.data])
    def __repr__(self):
        return 'Vector({0:})'.format(self.data)
    ...
```

9

Vektoren in Python

```
from math import sqrt, pow
class Vector:
    ...
    def dotproduct(self, other):
        return sum(x * y for (x, y) in zip(self.data, other.data))
    def norm(self):
        return sqrt(sum(pow(x, 2) for x in self.data))
    def cos(self, other):
        return self.dotproduct(other) / (self.norm() * other.norm())
    def distance(self, other):
        return sqrt(sum(pow(x - y, 2)
            for (x, y) in zip(self.data, other.data)))
    @staticmethod
    def centroid(vecs):
        return sum(vecs[1:], vecs[0]) * (1.0 / len(vecs))
```

10

Information Retrieval

- Typischerweise liefert ein Information Retrieval System viele Dokumente für eine Anfrage \Rightarrow beste Treffer zuerst
- Fasse Dokumente und Anfrage als Vektoren auf
 - Alle Wörter in Dokumentsammlung: w_1, \dots, w_n
 - Vektor für Dokument d : $\mathbf{v}_d = (v_1, \dots, v_n)$
= w_i kommt v_i mal in Dokument d vor (bzw. tf-idf o.ä.)
- Sortiere die Dokumente nach ihrer Ähnlichkeit bzw. Distanz zur Anfrage
 - (Ähnlichkeit \sim Winkel zwischen Vektoren)

11

(Beispiel aus FSLT 2008/09, Pinkal)

Term-Dokument Matrix

	D ₁	D ₂	D ₃	...	
	dolphin	3	2	0	...
$\cos(D_1, D_2) = 0.62$	human	1	0	3	...
$\cos(D_1, D_3) = 0.14$	language	0	0	5	...
$\cos(D_2, D_3) = 0.0$	like	1	1	0	...
	mammal	1	1	0	...
	technology	0	0	1	...
	warm-blooded	1	1	0	...
	whale	0	3	0	...

12

Term-Dokument Matrix

- Are dolphins mammals?

	D ₁	D ₂	D ₃	Q
dolphin	3	2	0	1
human	1	0	3	0
language	0	0	5	0
like	1	1	0	0
mammal	1	1	0	1
technology	0	0	1	0
warm-blooded	1	1	0	0
whale	0	3	0	0

$\cos(D_1, Q) = 0.78$

$\cos(D_2, Q) = 0.53$

$\cos(D_3, Q) = 0.0$

13

Semantische Ähnlichkeit

- Distributionelle Hypothese: Wörter, die in ähnlichen Kontexten vorkommen, sind semantisch ähnlich
- eine Wort-Wort Matrix kodiert, wie häufig zwei Wörter im gleichen Kontext zusammen vorkommen.
- Kontexte können sein:
 - Dokumente
 - Abschnitte
 - Kontext-Fenster
- und können ggf. die syntaktische Struktur berücksichtigen

14

Wort-Wort Matrix

	dolp.	hum.	lang.	like	mam.	tech.	wb	whale
dolphin	5	1	0	2	0	0	2	3
human	1	4	5	1	1	1	1	0
language	0	3	5	0	1	1	0	0
like	1	1	0	2	0	0	2	3
technology	0	3	5	0	1	1	0	0
warm-blooded	5	1	0	2	0	0	2	3
whale	2	0	0	1	0	0	1	3

15

Vektoren als Wörterbücher

- In viele Anwendungsfällen hat ein Vektor nur wenige Komponenten $\neq 0$ \rightarrow Darstellung mit Listen nicht optimal
- Alternativ können Vektoren als Wörterbücher repräsentiert werden, mit 0 als Defaultwert.

16

Vektoren als Wörterbücher

```
class Vector(dict):
    def __getitem__(self, key):
        return dict.get(self, key, 0)
    def __add__(self, other):
        return Vector((k, self[k] + other[k])
                      for k in set(self.keys() + other.keys()))
    def __mul__(self, scalar):
        return Vector(((k, v * scalar)
                      for (k, v) in self.items()))
    ...
```

17

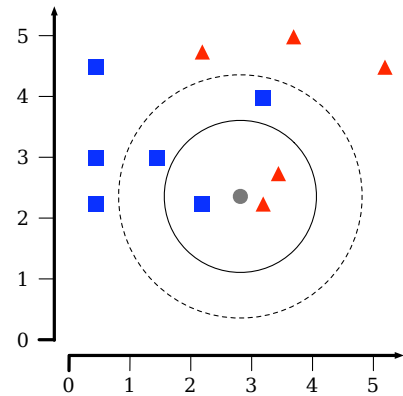
Vektoren als Wörterbücher

```
class Vector(dict):
    ...
    def dotproduct(self, other):
        return sum(self[k] * other[k]
                  for k in self.iterkeys() if k in other)
    def norm(self):
        return sqrt(sum(v * v for v in self.values()))
    def cos(self, other):
        return self.dotproduct(other)/(self.norm()*other.norm())
    ...
```

18

k nearest neighbors (kNN)

- Der kNN Algorithmus ist ein Klassifikationsverfahren, das Objekten eine Klasse zuordnet, basierend auf den Klassen seiner k nächsten Nachbarn.
- Gegeben ist eine Menge von Objekten und deren Klassen („Trainingsdaten“)
- Berechne die Distanz zwischen dem zu klassifizierenden Objekt und allen Trainings-Objekten.
- Weise dem neuen Objekt die Klasse seiner k nächsten Nachbarn zu (Mehrheitsentscheidung).



19

WSD mit kNN

- kNN kann man auch für Word Sense Disambiguation benutzen
- Variante 1: Vektoren = (Trainings- u. Test-)Dokumente
 - wie Bayes von letzter Woche
 - klassifiziert ein `_Dokument_` (nicht eine Wort-Instanz)
- Variante 2: Vektoren = Auftreten des Wortes im Kontext
 - Bestimme ein Kontextfenster von n Worten (oder dem Dokument)
 - pro Auftreten des Wortes in Frage ein Vektor im Modell
 - klassifiziere das (die) Auftreten des Wortes im Text (ggf. Mehrheitsentscheidung)

20

Clustering mit *k-means*

- Clusteranalyse: Ermittlung von Gruppen (Clustern) von Objekten bzw. Vektoren, deren beobachtbare Eigenschaften bestimmte Ähnlichkeiten aufweisen.
- *k-means* Algorithmus: Partitioniere eine Menge von Vektoren in *k* Cluster
- Zielsetzung: Minimiere den Abstand der Elemente eines Clusters zu seinem Zentrum.
- Residual sum of squares (RSS)
 - $RSS = \sum_{1 \leq k \leq K} \sum_{x \in \omega_k} \|x - \mu(\omega_k)\|^2$
 - ω_k = Cluster *k*, $\mu(\omega_k)$ = Centroid von ω_k

21

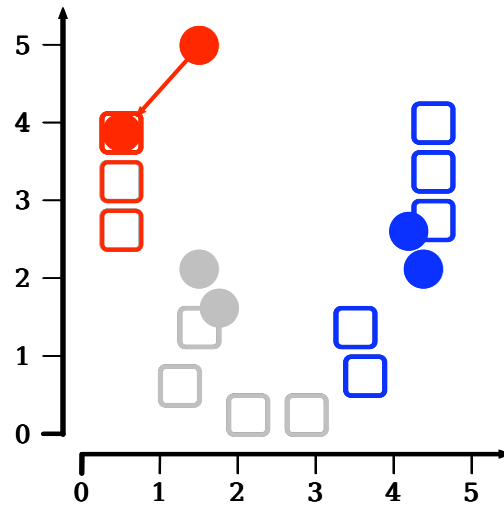
Der *k-means* Algorithmus

- Initialisierung: zufällige Auswahl von *k* Clusterzentren
- Iterative (Neu-) Berechnung der Clusterzentren bis Abbruchbedingung zutrifft:
 - Weise jedes Objekt (Vektor) dem ihm am nächsten liegenden Clusterzentrum zu
 - Berechne für jeden Cluster die Clusterzentren neu

22

Der *k-means* Algorithmus (Beispiel)

1. Zufällige Auswahl von drei Clusterzentren (●, ●, ●)
2. Zuordnung der Objekte zu Cluster mit dem nächstliegenden Zentrum.
3. Neuberechnung der Clusterzentren.
4. ...



23

(Manning, Raghavan, Schütze, 2008)

Der *k-means* Algorithmus

```

K-MEANS( $\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N\}, K$ )
1   $(\vec{s}_1, \vec{s}_2, \dots, \vec{s}_K) \leftarrow \text{SELECTRANDOMSEEDS}(\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N\}, K)$ 
2  for  $k \leftarrow 1$  to  $K$ 
3  do  $\vec{\mu}_k \leftarrow \vec{s}_k$ 
4  while stopping criterion has not been met
5  do for  $k \leftarrow 1$  to  $K$ 
6      do  $\omega_k \leftarrow \{\}$ 
7      for  $n \leftarrow 1$  to  $N$ 
8          do  $j \leftarrow \arg \min_{j'} |\vec{\mu}_{j'} - \vec{x}_n|$ 
9               $\omega_j \leftarrow \omega_j \cup \{\vec{x}_n\}$  (reassignment of vectors)
10     for  $k \leftarrow 1$  to  $K$ 
11         do  $\vec{\mu}_k \leftarrow \frac{1}{|\omega_k|} \sum_{\vec{x} \in \omega_k} \vec{x}$  (recomputation of centroids)
12 return  $\{\vec{\mu}_1, \dots, \vec{\mu}_K\}$ 

```

24

Mögliche Abbruchbedingungen

- Begrenzte Anzahl von Iterationsschritten
- Zuweisung von Objekten zu Clustern ändert sich zwischen zwei Iterationsschritten nicht.
- Die Centroide ändern sich zwischen zwei Iterationsschritten nicht.
- Abbruch, wenn RSS einen Schwellwert unterschreitet
- Abbruch, wenn zwischen den Iterationsschritten die Abnahme des RSS einen Schwellwert unterschreitet.

25

Eigenschaften

- k-means liefert für unterschiedliche initiale Clusterzentren ggf. unterschiedliche Ergebnisse
- ein Cluster kann in einem Schritt leer bleiben
- k-means findet nicht notwendigerweise die global optimale Lösung
- optimales Clustering zu finden gehört zur Komplexitätsklasse NP

26