Übungsblatt 7: Kontextfreie Sprachen

1. Sei $G = \langle V, \Sigma, R, S\rangle$, wobei V = {S, A, B, a, b}, Σ = {a, b} und

   $$R = \{\, S \to aB,\; S \to bA,\; A \to a,\; A \to aS,\; A \to bAA,\; B \to b,\; B \to bS,\; B \to aBB \,\}$$

   a) Beweisen Sie: Wenn $w \in V^*$ und $S \Rightarrow^+ w$, dann ist $\#a\ in\ w + \#A\ in\ w = \#b\ in\ w + \#B\ in\ w$ (# = „Anzahl der“).

      Hinweis: Induktion über die Ableitungslänge

   b) a) zeigt uns, dass $L(G) \subseteq \{\ w \in \Sigma^+ : \#a\ in\ w = \#b\ in\ w\ \}$. Zeigen Sie jetzt, dass

      $L(G) = \{\ w \in \Sigma^+ : \#a\ in\ w = \#b\ in\ w\ \}$.

      Hinweis: Zeigen Sie durch Induktion über die Wortlänge, dass:

      Wenn $w \in \{\ w \in \Sigma^+ : \#a\ in\ w = \#b\ in\ w\ \}$, dann $w \in L(G)$.

2. Beweisen Sie die folgende starke Version des Pumping-Lemmas für kontextfreie Sprachen:

   Sei G eine kontextfreie Grammatik. Dann gibt es Zahlen K und k, so dass für jede Zeichenkette $w \in L(G)$ mit $|w| > K$ folgendes gilt: Es gibt Wörter $u, v, x, y, z \in \Sigma^*$ so dass:

   1) $w = uvxyz$
   2) mindestens eine von v und y ist nicht ε
   3) Für alle $n \geq 0$: $uv^nxy^nz \in L$
   4) $|vxy| \leq k$

   Hinweis: Die zusätzliche Bedingung 4) lässt sich durch genaue Betrachtung des Beweises der ursprünglichen Version des Lemmas ableiten.

3. Wenden Sie 2) an, um zu beweisen, dass

   $COPY = \{\ ww : w \in \{a, b\}^*\}$

   nicht kontextfrei ist.