Grammatikformalismen SS 2010 —– 05.05.2010

Merkmalstrukturen: Unifikation und Generalisierung

- **Unifikation**

Definition:
Die Unifikation von zwei Merkmalstrukturen ist die allgemeinste Merkmalstruktur, die von beiden subsumiert wird.
Einige Beispiele:

$$\begin{bmatrix} \text{a: } \boxed{1} \\ \text{b: } \boxed{1} \begin{bmatrix} \text{d: -} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \sqcup \begin{bmatrix} \text{a: } \begin{bmatrix} \text{c: } \boxed{1} \text{ -} \\ \text{d: } \boxed{2} \end{bmatrix} \\ \text{b: } \begin{bmatrix} \text{c: } \boxed{1} \\ \text{d: } \boxed{2} \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{a: } \boxed{1} \begin{bmatrix} \text{c: -} \\ \text{d: -} \end{bmatrix} \\ \text{b: } \boxed{1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \text{a: } \begin{bmatrix} \text{c: } + \\ \text{d: -} \end{bmatrix} \\ \text{b: } \begin{bmatrix} \text{e: -} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \sqcup \begin{bmatrix} \text{a: } \boxed{1} \\ \text{b: } \boxed{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{a: } \boxed{1} \begin{bmatrix} \text{c: } + \\ \text{d: -} \\ \text{e: -} \end{bmatrix} \\ \text{b: } \boxed{1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \text{b: } \begin{bmatrix} \text{a: -} \\ \text{d: } + \end{bmatrix} \end{bmatrix} \sqcup \begin{bmatrix} \text{b: } \boxed{1} \\ \text{c: } \boxed{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{c: } \boxed{1} \begin{bmatrix} \text{d: } + \\ \text{a: -} \end{bmatrix} \\ \text{b: } \boxed{1} \end{bmatrix}$$

Einige Eigenschaften von Unifikation:

∗ Wenn für zwei Merkmale t_1 und t_2 gilt, dass $t_1 \sqsubset t_2$, dann folgt daraus, dass $t_1 \sqcup t_2 = t_2$

∗ $a \sqcup \top = a$
∗ $\begin{bmatrix} \text{f}_1\text{: } a \end{bmatrix} \sqcup \top = \begin{bmatrix} \text{f}_1\text{: } a \end{bmatrix}$
∗ $a \sqcup \bot = \bot$
∗ $a \sqcup b = \bot$
∗ $\begin{bmatrix} \text{f}_1\text{: } a \end{bmatrix} \sqcup \bot = \bot$
∗ $\begin{bmatrix} \text{f}_1\text{: } a \end{bmatrix} \sqcup a = \bot$
∗ $\begin{bmatrix} \text{f}_1\text{: } a \end{bmatrix} \sqcup \begin{bmatrix} \text{f}_2\text{: } c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{f}_1\text{: } a \\ \text{f}_2\text{: } c \end{bmatrix}$

- **Generalisierung**

  Definition:
  Die Generalisierung von zwei Merkmalstrukturen ist die meist spezifische Merkmalstruktur, die beide subsumiert.
  Es kann **mit Disjunktion** und **ohne Disjunktion** generalisiert werden. Generalisierung mit und ohne Disjunktion hat unterschiedliche Eigenschaften und der Prozess kann zu unterschiedlichen Ergebnissen führen. In den meiste Fällen wird mit Disjunktion generalisiert.

  Einige Beispiele **mit** Disjunktion:

$$\begin{bmatrix} \text{a: } \boxed{1} \\ \text{b: } \boxed{1} \begin{bmatrix} \text{d: -} \\ \text{c: } + \end{bmatrix} \end{bmatrix} \sqcap \begin{bmatrix} \text{a: } \begin{bmatrix} \text{c: } \boxed{1} + \\ \text{d: } \boxed{2} \end{bmatrix} \\ \text{b: } \begin{bmatrix} \text{c: } \boxed{1} \\ \text{d: } \boxed{2} \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{a: } \begin{bmatrix} \text{c: } \boxed{1} + \\ \text{d: } \boxed{2} \end{bmatrix} \\ \text{b: } \begin{bmatrix} \text{c: } \boxed{1} \\ \text{d: } \boxed{2} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} f_1\text{: } a_1 \\ f_2\text{: } a_3 \end{bmatrix} \sqcap \begin{bmatrix} f_1\text{: } a_4 \\ f_2\text{: } a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1\text{: } a_1 \vee a_4 \\ f_2\text{: } a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1\text{: } \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_4 \end{Bmatrix} \\ f_2\text{: } a_3 \end{bmatrix}$$ [1]

$$\begin{bmatrix} f_1\text{: } a_1 \\ f_2\text{: } a_3 \end{bmatrix} \sqcap \begin{bmatrix} f_3\text{: } a_1 \\ f_2\text{: } a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_1\text{: } a_1 \\ f_3\text{: } a_1 \end{Bmatrix} \\ f_2\text{: } a_3 \end{bmatrix}$$ [2]

  Einige Eigenschaften von Generalisierung **mit Disjunktion**:

  * Wenn für zwei Merkmale t_1 und t_2 gilt, dass $t_1 \sqsubset t_2$, dann folgt daraus, dass $t_1 \sqcap t_2 = t_1$
  * **Distributivität**:

    $(t_1 \sqcap t_2) \sqcup t_3 = (t_1 \sqcup t_3) \sqcap (t_2 \sqcup t_3)$
    $(t_1 \sqcup t_2) \sqcap t_3 = (t_1 \sqcap t_3) \sqcup (t_2 \sqcap t_3)$

  * $a \sqcap \top = \top$
  * $\begin{bmatrix} f_1\text{: } a \end{bmatrix} \sqcap \top = \top$
  * $a \sqcap \bot = a$
  * $\begin{bmatrix} f_1\text{: } a \end{bmatrix} \sqcap \bot = \begin{bmatrix} f_1\text{: } a \end{bmatrix}$
  * $\begin{bmatrix} f_1\text{: } a \end{bmatrix} \sqcap a$: kann nicht vereinfacht werden
  * $\begin{bmatrix} f_1\text{: } a \end{bmatrix} \sqcap \begin{bmatrix} f_2\text{: } c \end{bmatrix}$: kann nicht vereinfacht werden

[1] $a_1 \vee a_4$ und $\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_4 \end{Bmatrix}$ sind unterschiedliche Notizen mit der gleichen Bedeutung.

[2] Wie oben gilt, dass $\begin{Bmatrix} f_1\text{: } a_1 \\ f_3\text{: } a_1 \end{Bmatrix} = (f_1\text{: } a_1) \vee (f_3\text{: } a_1)$.

Kompliziertere Beispiele von Generalisierung mit Disjunktion:

1. $$\left(\begin{bmatrix} f_2: \boxed{1} \\ f_3: \boxed{1} \end{bmatrix} \sqcap \begin{bmatrix} f_1: \boxed{2} \\ f_3: \boxed{2} \end{bmatrix}\right) \sqcup \begin{bmatrix} f_1: a_2 \\ f_3: a_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} f_2: \boxed{1} \\ f_3: \boxed{1} \end{bmatrix} \sqcup \begin{bmatrix} f_1: a_2 \\ f_3: a_1 \end{bmatrix}\right) \sqcap \left(\begin{bmatrix} f_1: \boxed{2} \\ f_3: \boxed{2} \end{bmatrix} \sqcup \begin{bmatrix} f_1: a_2 \\ f_3: a_1 \end{bmatrix}\right) =$$

$$\perp \sqcap \begin{bmatrix} f_1: a_2 \\ f_2: \boxed{1}\ a_1 \\ f_3: \boxed{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1: a_2 \\ f_2: \boxed{1}\ a_1 \\ f_3: \boxed{1} \end{bmatrix}$$

Alternative Schreibweise:

$$\left(\begin{bmatrix} f_2: \boxed{1} \\ f_3: \boxed{1} \end{bmatrix} \sqcap \begin{bmatrix} f_1: \boxed{2} \\ f_3: \boxed{2} \end{bmatrix}\right) \sqcup \begin{bmatrix} f_1: a_2 \\ f_3: a_1 \end{bmatrix} = \left[\left\{\begin{array}{l} \begin{bmatrix} f_2: \boxed{1} \\ f_3: \boxed{1} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} f_1: \boxed{2} \\ f_3: \boxed{2} \end{bmatrix} \end{array}\right\}\right] \sqcup \begin{bmatrix} f_1: a_2 \\ f_3: a_1 \end{bmatrix} =$$

$$\left[\left\{\begin{array}{l} \left(\begin{bmatrix} f_2: \boxed{1} \\ f_3: \boxed{1} \end{bmatrix} \sqcup \begin{bmatrix} f_1: a_2 \\ f_3: a_1 \end{bmatrix}\right) \\ \left(\begin{bmatrix} f_1: \boxed{2} \\ f_3: \boxed{2} \end{bmatrix} \sqcup \begin{bmatrix} f_1: a_2 \\ f_3: a_1 \end{bmatrix}\right) \end{array}\right\}\right] = \left[\left\{\begin{array}{l} \perp \\ \begin{bmatrix} f_1: a_2 \\ f_2: \boxed{1}\ a_1 \\ f_3: \boxed{1} \end{bmatrix} \end{array}\right\}\right] = \begin{bmatrix} f_1: a_2 \\ f_2: \boxed{1}\ a_1 \\ f_3: \boxed{1} \end{bmatrix}$$

2. $$\left(\begin{bmatrix} a: \begin{bmatrix} c: + \\ d: - \end{bmatrix} \\ b: \begin{bmatrix} e: - \end{bmatrix} \end{bmatrix} \sqcap \begin{bmatrix} a: \boxed{1} \begin{bmatrix} e: - \\ c: + \end{bmatrix} \\ b: \boxed{1} \end{bmatrix}\right) \sqcup \left(\begin{bmatrix} a: \begin{bmatrix} c: + \\ f: - \end{bmatrix} \\ b: \begin{bmatrix} e: + \end{bmatrix} \end{bmatrix} \sqcap \begin{bmatrix} a: \begin{bmatrix} d: + \end{bmatrix} \\ b: \begin{bmatrix} e: - \\ c: + \end{bmatrix} \end{bmatrix}\right) =$$

$$\left(\begin{bmatrix} a: \begin{bmatrix} c: + \\ d: - \end{bmatrix} \\ b: \begin{bmatrix} e: - \end{bmatrix} \end{bmatrix} \sqcup \begin{bmatrix} a: \begin{bmatrix} c: + \\ f: - \end{bmatrix} \\ b: \begin{bmatrix} e: + \end{bmatrix} \end{bmatrix}\right) \sqcap \left(\begin{bmatrix} a: \begin{bmatrix} c: + \\ d: - \end{bmatrix} \\ b: \begin{bmatrix} e: - \end{bmatrix} \end{bmatrix} \sqcup \begin{bmatrix} a: \begin{bmatrix} d: + \end{bmatrix} \\ b: \begin{bmatrix} e: - \\ c: + \end{bmatrix} \end{bmatrix}\right) \sqcap$$

$$\left(\begin{bmatrix} a: \boxed{1} \begin{bmatrix} e: - \\ c: + \end{bmatrix} \\ b: \boxed{1} \end{bmatrix} \sqcup \begin{bmatrix} a: \begin{bmatrix} c: + \\ f: - \end{bmatrix} \\ b: \begin{bmatrix} e: + \end{bmatrix} \end{bmatrix}\right) \sqcap \left(\begin{bmatrix} a: \boxed{1} \begin{bmatrix} e: - \\ c: + \end{bmatrix} \\ b: \boxed{1} \end{bmatrix} \sqcup \begin{bmatrix} a: \begin{bmatrix} d: + \end{bmatrix} \\ b: \begin{bmatrix} e: - \\ c: + \end{bmatrix} \end{bmatrix}\right) =$$

$$\perp \sqcap \perp \sqcap \perp \sqcap \left(\begin{bmatrix} a: \boxed{1} \begin{bmatrix} e: - \\ c: + \end{bmatrix} \\ b: \boxed{1} \end{bmatrix} \sqcup \begin{bmatrix} a: \begin{bmatrix} d: + \end{bmatrix} \\ b: \begin{bmatrix} e: - \\ c: + \end{bmatrix} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} :a\ \boxed{1} \begin{bmatrix} e: - \\ c: + \\ d: + \end{bmatrix} \\ b: \boxed{1} \end{bmatrix}$$

Einige Beispiele **ohne** Disjunktion:

$$\begin{bmatrix} \text{a: } \boxed{1} \\ \text{b: } \boxed{1} \begin{bmatrix} \text{d: -} \\ \text{c: } + \end{bmatrix} \end{bmatrix} \sqcap \begin{bmatrix} \text{a: } \begin{bmatrix} \text{c: } \boxed{1} + \\ \text{d: } \boxed{2} \end{bmatrix} \\ \text{b: } \begin{bmatrix} \text{c: } \boxed{1} \\ \text{d: } \boxed{2} \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{a: } \begin{bmatrix} \text{c: } \boxed{1} + \\ \text{d: } \boxed{2} \end{bmatrix} \\ \text{b: } \begin{bmatrix} \text{c: } \boxed{1} \\ \text{d: } \boxed{2} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \text{a: } \begin{bmatrix} \text{c: } + \\ \text{d: -} \end{bmatrix} \\ \text{b: } \begin{bmatrix} \text{e: -} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \sqcap \begin{bmatrix} \text{a: } \boxed{1} \begin{bmatrix} \text{e: -} \\ \text{c: } + \end{bmatrix} \\ \text{b: } \boxed{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{a: } \begin{bmatrix} \text{c: } + \end{bmatrix} \\ \text{b: } \begin{bmatrix} \text{e: -} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \text{b: } \begin{bmatrix} \text{a: -} \\ \text{d: } + \end{bmatrix} \end{bmatrix} \sqcap \begin{bmatrix} \text{b: } \boxed{1} \\ \text{c: } \boxed{1} \begin{bmatrix} \text{a: } + \\ \text{d: } + \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{b: } \begin{bmatrix} \text{d: } + \\ \text{a: } \top \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Einige Eigenschaften von Generalisierung **ohne Disjunktion**:

* Wenn für zwei Merkmale t_1 und t_2 gilt, dass $t_1 \sqsubset t_2$, dann folgt daraus, dass $t_1 \sqcap t_2 = t_1$
* **Keine Distributivität**:
  $(t_1 \sqcap t_2) \sqcup t_3 \neq (t_1 \sqcup t_3) \sqcap (t_2 \sqcup t_3)$
  $(t_1 \sqcup t_2) \sqcap t_3 \neq (t_1 \sqcap t_3) \sqcup (t_2 \sqcap t_3)$.
* $a \sqcap \top = \top$
* $\begin{bmatrix} \text{f}_1\text{: } a \end{bmatrix} \sqcap \top = \top$
* $a \sqcap \bot = a$
* $\begin{bmatrix} \text{f}_1\text{: } a \end{bmatrix} \sqcap \bot = \begin{bmatrix} \text{f}_1\text{: } a \end{bmatrix}$
* $\begin{bmatrix} \text{f}_1\text{: } a \end{bmatrix} \sqcap a = \top$
* $\begin{bmatrix} \text{f}_1\text{: } a \end{bmatrix} \sqcap \begin{bmatrix} \text{f}_2\text{: } c \end{bmatrix} = \top$

– **Vergleich Generalisierung ohne Disjunktion (links) und mit Disjunktion (rechts):**

$$\begin{array}{ccc} & \top & \\ & & \\ 1 & 2 & 3 \\ & & \\ & \bot & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & \top & \\ 1\vee2 & 1\vee3 & 2\vee3 \\ & & \\ 1 & 2 & 3 \\ & \bot & \end{array}$$

* Links: Nicht distributiver Verband (keine Disjunktion), Beispiel:
  · $(1 \sqcup 2) \sqcap 3 = \bot \sqcap 3 = 3$
  · $(1 \sqcap 3) \sqcup (2 \sqcap 3) = \top \sqcup \top = \top$
  Rechts: Distributiver Verband (mit Disjunktion), Beispiel:
  · $(1 \sqcup 2) \sqcap 3 = \bot \sqcap 3 = 3$
  · $(1 \sqcap 3) \sqcup (2 \sqcap 3) = (1 \vee 3) \sqcup (2 \vee 3) = 3$

Reference: Haugeneder, H. und H. Trost (1995) Grammatikformalismen. In: G. Görz (Hrsg.) Einführung in die künstliche Intelligenz, Addison-Wesley, 2. Auflage.